

Část II.

Elementární úvod do infinitesimálního kalkulu



Mgr. David Zoul

2011



Obsah

Absolutní hodnota čísla a její vlastnosti	10
<i>Věta o absolutní hodnotě součtu</i>	<i>10</i>
<i>Věta o absolutní hodnotě rozdílu</i>	<i>11</i>
<i>Věta o absolutní hodnotě součinu</i>	<i>11</i>
<i>Věta o absolutní hodnotě podílu</i>	<i>12</i>
Zobrazení a funkce	12
<i>Kartézský součin množin</i>	<i>12</i>
<i>Zobrazení mezi množinami</i>	<i>14</i>
<i>Funkce coby speciální druh zobrazení</i>	<i>16</i>
<i>Inverzní funkce a její vlastnosti</i>	<i>18</i>
<i>Shrnutí učiva</i>	<i>20</i>
<i>Operace komposice funkcí</i>	<i>21</i>
<i>Elementární funkce</i>	<i>22</i>
<i>Klasifikace funkcí</i>	<i>24</i>
Okolí bodu	24
<i>Věta o okolí součtu bodů</i>	<i>24</i>
<i>Věta o okolí součinu bodů</i>	<i>25</i>
<i>Věta o okolí podílu bodů</i>	<i>27</i>
Limita funkce jedné reálné proměnné	28
<i>Definice limity funkce v bodě</i>	<i>29</i>
<i>Věta o jednoznačnosti limity funkce v bodě</i>	<i>30</i>
<i>Věta o limitě součtu, součinu a podílu funkcí</i>	<i>31</i>
Spojitosť funkce	33
<i>Heineova definice spojitosti</i>	<i>33</i>
<i>Věta o spojitosti součtu, součinu a podílu funkcí</i>	<i>33</i>
<i>Věta o spojitosti komposice funkcí</i>	<i>34</i>

Singularity funkce	35
Metody výpočtu limit funkcí jedné reálné proměnné	42
<i>Limity racionálních lomených funkcí</i>	<i>42</i>
<i>Limity iracionálních lomených funkcí</i>	<i>44</i>
<i>Limity goniometrických funkcí</i>	<i>46</i>
<i>Nevlastní limity a limity v nevlastních bodech</i>	<i>50</i>
<i>Příklady výpočtu nevlastní limity</i>	<i>50</i>
<i>Příklady výpočtu limit v nevlastních bodech</i>	<i>50</i>
<i>Substituční metoda výpočtu limit</i>	<i>54</i>
<i>Sandwich theorem</i>	<i>57</i>
Rředehra k diferenciálnímu počtu funkce jedné reálné proměnné	60
<i>Derivace, difference a diferenciál funkce</i>	<i>60</i>
<i>Derivace součinu funkcí</i>	<i>63</i>
<i>Derivace podílu funkcí</i>	<i>63</i>
<i>Derivace komposice funkcí</i>	<i>64</i>
<i>Derivace inverzní funkce</i>	<i>65</i>
<i>Příklady výpočtu derivací</i>	<i>65</i>
Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné	69
<i>První Bolzanova věta</i>	<i>69</i>
<i>Druhá Bolzanova věta</i>	<i>70</i>
<i>Weierstrassona věta</i>	<i>71</i>
<i>Rolleova věta</i>	<i>72</i>
<i>Cauchyova věta</i>	<i>73</i>
<i>Lagrangeova věta</i>	<i>75</i>
<i>l'Hospitalova věta</i>	<i>77</i>
<i>l'Hospitalova metoda výpočtu limit</i>	<i>83</i>
<i>Taylorova věta</i>	<i>86</i>

Analýza průběhu funkcí jedné reálné proměnné	88
<i>Taylorova a Maclauronova řada funkce</i>	88
<i>Tečna a asymptota</i>	94
<i>Oskulační kružnice a křivost funkce v bodě</i>	95
<i>Rotující vztažná soustava</i>	100
<i>Věta o konvexnosti a konkávnosti funkce v bodě</i>	106
<i>Věta o extrémech funkce</i>	107
<i>Věta o inflexních bodech funkce</i>	109
Analytické vyšetřování průběhu funkcí jedné reálné proměnné	111
Slovní úlohy na výpočet lokálních extrémů funkce	116
<i>Maximalizace obsahu</i>	116
<i>Maximalizace objemu</i>	117
<i>Minimalizace povrchu</i>	118
<i>Optimalizace osvětlení plochy</i>	119
<i>Odvození Snellova zákona z Fermatova variačního principu</i>	121
<i>Výpočet rezonanční frekvence tlumeného harmonického oscilátoru</i>	125
Leibnizův integrál	128
<i>Primitivní funkce</i>	128
<i>Leibnizova věta</i>	129
Metody výpočtu Leibnizova integrálu	131
<i>Metoda přímého invertování derivace</i>	131
<i>Metoda per partes</i>	132
<i>Příklady použití metody per partes</i>	133
<i>První věta o substituci</i>	136
<i>Příklady použití substituční metody</i>	136
<i>Druhá věta o substituci</i>	140
<i>Speciální substituce</i>	143
<i>Příklady integrace pomocí speciálních substitucí</i>	145

Integrovaní ryze racionálních lomených funkcí	148
<i>Věta o racionálních kořenech polynomické funkce</i>	<i>148</i>
Integrovaní obecných racionálních lomených funkcí	154
<i>Integrovaní obecných racionálních lomených funkcí</i>	<i>161</i>
Jednoduché fyzikální aplikace Leibnizova integrálu	175
<i>Pohybové rovnice částice v konzervativním silovém poli</i>	<i>175</i>
<i>Poruchové řešení pohybových rovnic částice v nekonzervativním silovém poli</i>	<i>176</i>
Úvod do teorie lineárních diferenciálních rovnic	180
Jednoduché příklady použití lineárních diferenciálních rovnic	196
<i>Chladnutí čaje</i>	<i>196</i>
<i>Lineární harmonický oscilátor</i>	<i>197</i>
<i>Radioaktivní rozpad jader</i>	<i>199</i>
Úvod do teorie Riemannova integrálu	206
<i>Hlavní Riemannova věta</i>	<i>207</i>
<i>Věta o aditivitě Riemannova integrálu</i>	<i>211</i>
<i>Věta o tranzitivitě Riemannova integrálu</i>	<i>212</i>
<i>Věta o střední hodnotě Riemannova integrálu</i>	<i>213</i>
<i>Základní věta matematické analýzy</i>	<i>214</i>
Elementární příklady aplikace Riemannova integrálu	216
Geometrické aplikace Riemannova integrálu	216
<i>Obsah plochy</i>	<i>216</i>
<i>Délka rovinné křivky</i>	<i>221</i>
<i>Objem rotačního tělesa</i>	<i>223</i>

<i>Povrch pláště rotačního tělesa</i>	225
<i>Povrch pláště obecného tělesa</i>	228
<i>Délka prostorové křivky</i>	232
Fyzikální aplikace Riemannova integrálu – statika	233
<i>Tlaková síla</i>	233
<i>Statické momenty a těžiště těles</i>	235
<i>Momenty setrvačnosti rotačních těles vzhledem k rotační ose</i>	237
Fyzikální aplikace Riemannova integrálu – dynamika	239
<i>Práce a energie</i>	239
<i>Radiální pohyb v centrálně symetrickém gravitačním poli</i>	241
<i>Úniková rychlost</i>	245
<i>Obecná trajektorie tělesa v centrálně symetrickém gravitačním poli</i>	246
<i>Lineární harmonický oscilátor</i>	250
<i>Kinetická energie rotujícího tělesa</i>	253
Lebesgueův integrál	257
Základy teorie dvojného integrálu	257
<i>Integrační obory v kartézských souřadnicích</i>	259
<i>Integrační obory v polárních souřadnicích</i>	260
<i>Výpočet dvojného integrálu v kartézských souřadnicích</i>	266
<i>Výpočet dvojného integrálu v polárních souřadnicích</i>	267
<i>Fubiniho věta</i>	268
<i>Geometrické aplikace dvojného integrálu</i>	270
<i>Fyzikální zobecnění</i>	276
Křivkový integrál	279
<i>Výpočet křivkového integrálu</i>	279
<i>Těžiště obecné křivky</i>	284
<i>Konzervativní vektorová pole</i>	285

<i>Věta o konzervativitě pole</i>	285
<i>Zobecnění</i>	286
<i>Věta o nezávislosti na integrační cestě</i>	288
<i>Greenova věta</i>	294
<i>Stokesova věta</i>	299
Úvod do teorie trojného integrálu	304
<i>Integrační obory v kartézských souřadnicích</i>	306
<i>Integrační obory v cylindrických souřadnicích</i>	307
<i>Integrační obory ve sférických souřadnicích</i>	308
<i>Integrační obory v eliptických souřadnicích</i>	309
<i>Objem a těžiště obecného tělesa</i>	309
Gaussova – Ostrogradského věta, divergence vektorového pole	317
<i>Solenoidální vektorová pole</i>	321
Hamiltonův a Laplaceův operátor, směrová derivace	323
<i>Tečná rovina</i>	329
Taylorův rozvoj funkce více proměnných	331
Lokální extrémů funkce více proměnných	335
Vázané extrémů funkce více proměnných	337
Úvod do řešení parciálních diferenciálních rovnic	342
<i>Schrödingerova rovnice</i>	342
Úvod do Fourierovy analýzy	352
Fourierova řada	352
Fourierova transformace	359

<i>Základní vlastnosti</i>	361
Příklady aplikací Fourierovy transformace	364
<i>Princip neurčitosti</i>	364
<i>Gaussova funkce</i>	365
<i>Gaussovské vlnové klubko</i>	366
<i>Heisenbergovy relace neurčitosti</i>	369
<i>Skalární součin na prostoru funkcí</i>	373
<i>Prostorové rozlišení, modulační přenosová funkce</i>	374
<i>Nyquistovo kritérium, aliasing</i>	376
<i>Vícerozměrné zobecnění</i>	380
<i>Difrakce</i>	381
<i>Zobrazení nukleární magnetickou rezonancí – MRI</i>	383
<i>Prostorové dekódování MR signálu</i>	383
<i>Frekvenční k-prostor</i>	386
<i>Výstavba MR obrazu</i>	387
<i>Vlastnosti k-prostoru</i>	389
<i>Zobrazení výpočetní tomografií – CT</i>	390

Absolutní hodnota čísla a její vlastnosti

Absolutní hodnotu čísla a značíme $|a|$ a definujeme jako

$$|a| = \sqrt{a^2}. \quad (1)$$

Z této definice okamžitě plynou vlastnosti absolutní hodnoty

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Věta o absolutní hodnotě součtu

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: |a + b| \leq |a| + |b| \quad (3)$$

Důkaz

Zřejmě je

$$a \leq |a| \wedge b \leq |b| \Rightarrow a + b \leq |a| + |b|. \quad (4)$$

Podobně

$$-a \leq |-a| = |a| \wedge -b \leq |-b| = |b| \Rightarrow -(a + b) \leq |a| + |b|. \quad (5)$$

Protože

$$|a + b| = a + b \vee |a + b| = -(a + b), \quad (6)$$

musí platit

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \quad (7)$$

Věta o absolutní hodnotě rozdílu

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \left| |a| - |b| \right| \leq |a - b| \quad (8)$$

Důkaz

Z předešlé věty okamžitě vidíme, že

$$a = (a - b) + b \Rightarrow |a| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|. \quad (9)$$

Podobně též

$$b = (b - a) + a \Rightarrow |b| \leq |b - a| + |a| \Rightarrow -(|a| - |b|) = |b| - |a| \leq |b - a|, \quad (10)$$

přičemž platí samozřejmě rovnost

$$|b - a| = |a - b|. \quad (11)$$

Protože

$$\left| |a| - |b| \right| = |a| - |b| \vee \left| |a| - |b| \right| = -(|a| - |b|), \quad (12)$$

musí být

$$\left| |a| - |b| \right| \leq |a - b| \quad (13)$$

Věta o absolutní hodnotě součinu

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : |ab| = |a||b| \quad (14)$$

Důkaz

Rozebereme postupně všechny 3 případy, které zde mohou nastat

$$\begin{aligned}
a \geq 0 \wedge b \geq 0 &\Rightarrow ab \geq 0 \Rightarrow |ab| = ab = |a||b|, \\
a \geq 0 \wedge b \leq 0 &\Rightarrow -b \geq 0 \Rightarrow |ab| = |-(ab)| = |a(-b)| = |a||-b| = |a||b|, \\
a \leq 0 \wedge b \leq 0 &\Rightarrow -a \geq 0 \wedge -b \geq 0 \Rightarrow |ab| = |(-a)(-b)| = |-a||-b| = |a||b|.
\end{aligned}
\tag{15}$$

Věta o absolutní hodnotě podílu

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0: \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$
(16)

Důkaz

S využitím předešlé věty okamžitě dostáváme

$$a = \frac{a}{b}a \Rightarrow |a| = \left| \frac{a}{b} \right| |a| \Rightarrow \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$
(17)

Zobrazení a funkce

Kartézský součin množin



René Descartes (1596 – 1650)

Mějme např. následující dvě množiny bodů

$$\begin{aligned}
 A &= \{a_1, a_2, a_3\}, \\
 B &= \{b_2, b_3, b_4\}.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Kartézský součin $A \times B$ je definován coby množina uspořádaných dvojic bodů, z nichž první vždy náleží množině A , druhý množině B :

$$\begin{aligned}
 A \times B &= \\
 &= \{(a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_2), (a_3, b_3), (a_3, b_4)\}.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Pozorování: kartézský součin množin zjevně není komutativní operace, tj.

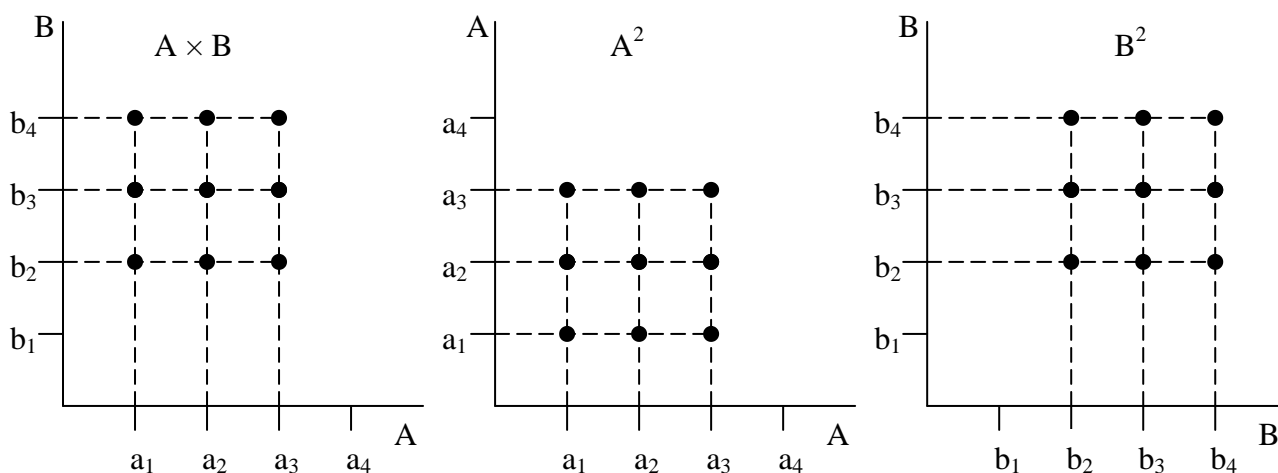
$$A \times B \neq B \times A. \tag{20}$$

Druhá mocnina množiny je definována pomocí kartézského součinu jako

$$\begin{aligned}
 A^2 &= A \times A \\
 &= \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_3, a_3)\},
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Geometricky lze tyto množiny bodů vyjádřit následujícími grafy

Obr. 1

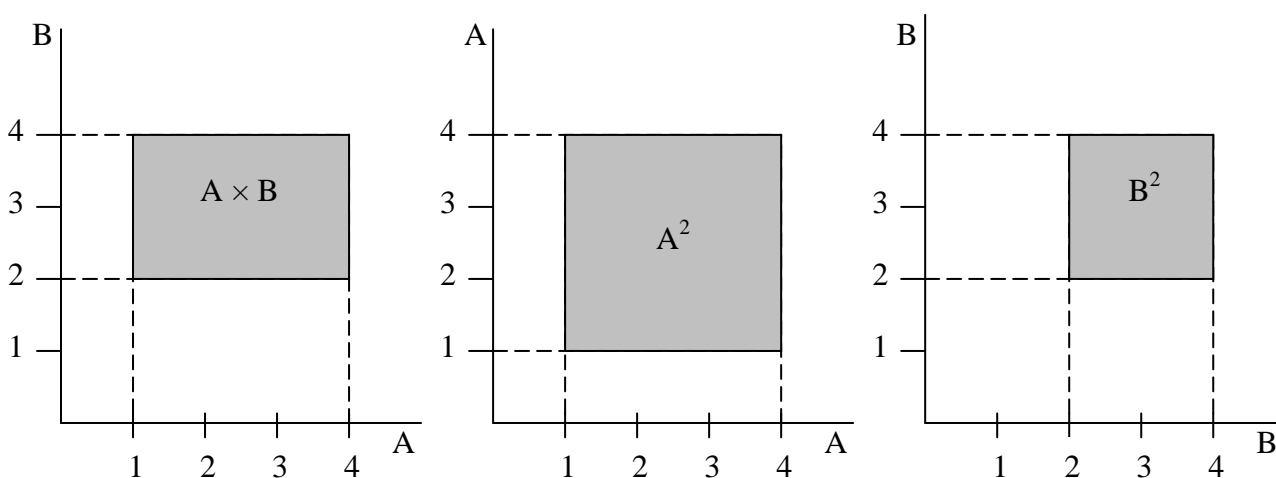


Přejdeme-li nyní od diskrétních množin ke spojitým, budou obrazy kartézského součinu tvořit plochy obdélníků, jak ukazuje následující příklad

Příklad 1 – kartézské součiny spojitých množin

$$\begin{aligned} A &= \langle 1, 4 \rangle, \\ B &= \langle 2, 4 \rangle, \end{aligned} \quad (22)$$

Obr. 2



Zobrazení mezi množinami

Operátorem zobrazení z množiny A do množiny B budeme rozumět předpis, kterým vybíráme z výše zobrazeného obdélníku kartézského součinu množin A a B pouze určité body. Operátory zobrazení obvykle značíme písmeny f, g, h, \dots . Platí tedy

$$x \in A \wedge y \in B \Rightarrow f : A \rightarrow B = \{(x, y) \in A \times B\}. \quad (23)$$

Množinu A budeme nazývat **vzorovou množinou** zobrazení f , množinu B **obrazovou množinou**. Prvky x množiny A pak nazýváme **vzory**. Všechny prvky y množiny B , jež mají svůj vzor ve vzorové množině náleží do množiny $H(f) \subset B$, kterou nazýváme **oborem hodnot** zobrazení f . Prvky oboru hodnot se nazývají **obrazy**, nebo též **hodnoty** zobrazení f .

Podmnožinu všech prvků vzorové množiny, které mají svůj obraz v obrazové množině, budeme nazývat **definičním oborem** zobrazení f , což značíme $D(f)$,

Zobrazení nazveme **injektivním zobrazením** neboli **monomorfismem**, jestliže platí

$$\forall [x_1, y_1], [x_2, y_2] \in f : (x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2). \quad (24)$$

Zobrazení nazveme **surjektivním zobrazením** neboli **epimorfismem**, jestliže

$$\forall x \in A : H(f) = B. \quad (25)$$

Je-li zobrazení injektivní a zároveň surjektivní, nazýváme jej **bijektivním zobrazením**, neboli **isomorfismem**.

Zobrazení nazveme **reflexivním**, právě když platí

$$\forall x \in A : [x, x] \in f : A \rightarrow B \quad (26)$$

Zobrazení nazveme **symetrickým**, právě když platí

$$\forall [x, y] \in f \Rightarrow [y, x] \in f \quad (27)$$

Zobrazení nazveme **inverzním** a značíme f^{-1} , právě když platí

$$D(f^{-1}) = H(f), H(f^{-1}) = D(f), x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x). \quad (28)$$

Jádrem zobrazení nazveme množinu bodů (tzv. **kořenů**)

$$\ker f = \forall x \in A : f(A \rightarrow B) = 0 \quad (29)$$

Funkce coby speciální druh zobrazení

Funkcí nazveme každé zobrazení, pro které platí

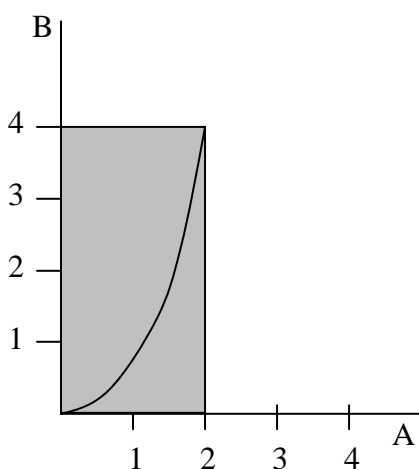
$$\forall [x_1, y_1], [x_2, y_2] \in f : (y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2). \quad (30)$$

Proměnné x , ze vzorové množiny, nazýváme **nezávisle proměnnými**, proměnné y z obrazové množiny B , na které se nám přes příslušný operátor f zobrazují nezávisle proměnné, nazýváme **závisle proměnnými**.

Příklad 2:

Nechť $A = \langle 0, 2 \rangle$, $B = \langle 0, 4 \rangle$ a nechť $f = x^2$. Pak graf příslušné funkce $f(A \rightarrow B)$ znázorňuje následující obrázek

Obr. 3



Vidíme, že nezávisle proměnnými jsou všechna čísla z intervalu $A = \langle 0, 2 \rangle$ a podobně, závisle proměnnými jsou všechna čísla z intervalu $B = \langle 0, 4 \rangle$. Jedná se tedy o epimorfismus.

Paritou funkce rozumíme vlastnost generovanou předpisem

$$\forall x \in D(f) : f(-x) = (-1)^k f(x). \quad (31)$$

Je-li k sudé číslo, pak speciálně platí

$$\forall x \in D(f): f(-x) = f(x) \quad (32)$$

a paritu takovéto funkce nazveme **sudou**.

Sudá funkce je generována např. operátorem $f(x) = x^2$.

Je-li k liché číslo, pak platí

$$\forall x \in D(f): f(-x) = -f(x) \quad (33)$$

a paritu takovéto funkce nazveme **lichou**.

Příklady operátorů generujících liché funkce jsou třeba

$$f(x) = x, f(x) = x^3, f(x) = \frac{|x|}{x}, \quad (34)$$

a jiné.

Funkci nazveme **periodickou** s periodou p , jestliže

$$\forall x \in D(f): x + p \in D(f) \wedge f(x + p) = f(x). \quad (35)$$

Příklady operátorů generujících periodické funkce jsou např.

$$f(x) = \sin x \equiv \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad (36)$$

$$f(x) = \cos x \equiv \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

a mnohé další.

Inverzní funkce a její vlastnosti

Dle definice inverzního zobrazení získáme inverzní funkci vzájemnou záměnou závisle a nezávisle proměnné. Poznamenejme, že k existenci inverzní funkce f^{-1} operátoru f je nutnou a postačující podmínkou, že operátor f je bijektivní.

Příklad 3:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} \equiv y, \quad (37)$$

odkud elementární úpravou dostáváme dvojici zobrazení

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{1-y}}. \quad (38)$$

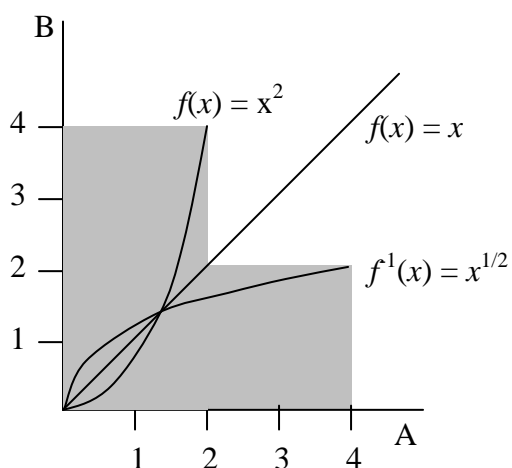
Formálním přejmenováním závisle a nezávisle proměnné nyní získáme dvě funkce

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad (39)$$

kteřé dohromady tvoří inverzní zobrazení f^{-1} k funkci f . Povšimněme si, že zobrazení (39) jako celek není funkcí, jeho kladná a záporná komponenta (každá odděleně) však ano. Je to důsledkem zjevné skutečnosti, že původní operátor (37) evidentně není bijektivní (neboť nesplňuje kritérium injektivit).

Graficky tvoří inverzní zobrazení f^{-1} vždy zrcadlový obraz původní funkce f , vzhledem k diagonále $f(x) = x$.

Obr. 4



Otočení kolem diagonály má zajímavý důsledek pro jádro zobrazení. Nalezneme-li totiž funkce f_i^{-1} , které dohromady tvoří inverzní operátor f^{-1} k operátoru f , pak jádro operátoru f je množinou

$$\ker f = \{f_i^{-1}(0)\}. \quad (40)$$

Příklad 4:

Hledejme jádro operátoru (37).

Řešení:

Protože jeho inverzní operátor (38) jsme již našli, stačí dosadit za jeho nezávisle proměnnou číslo 0 a dostáváme

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{1-0}} = \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right\rangle \quad (41)$$

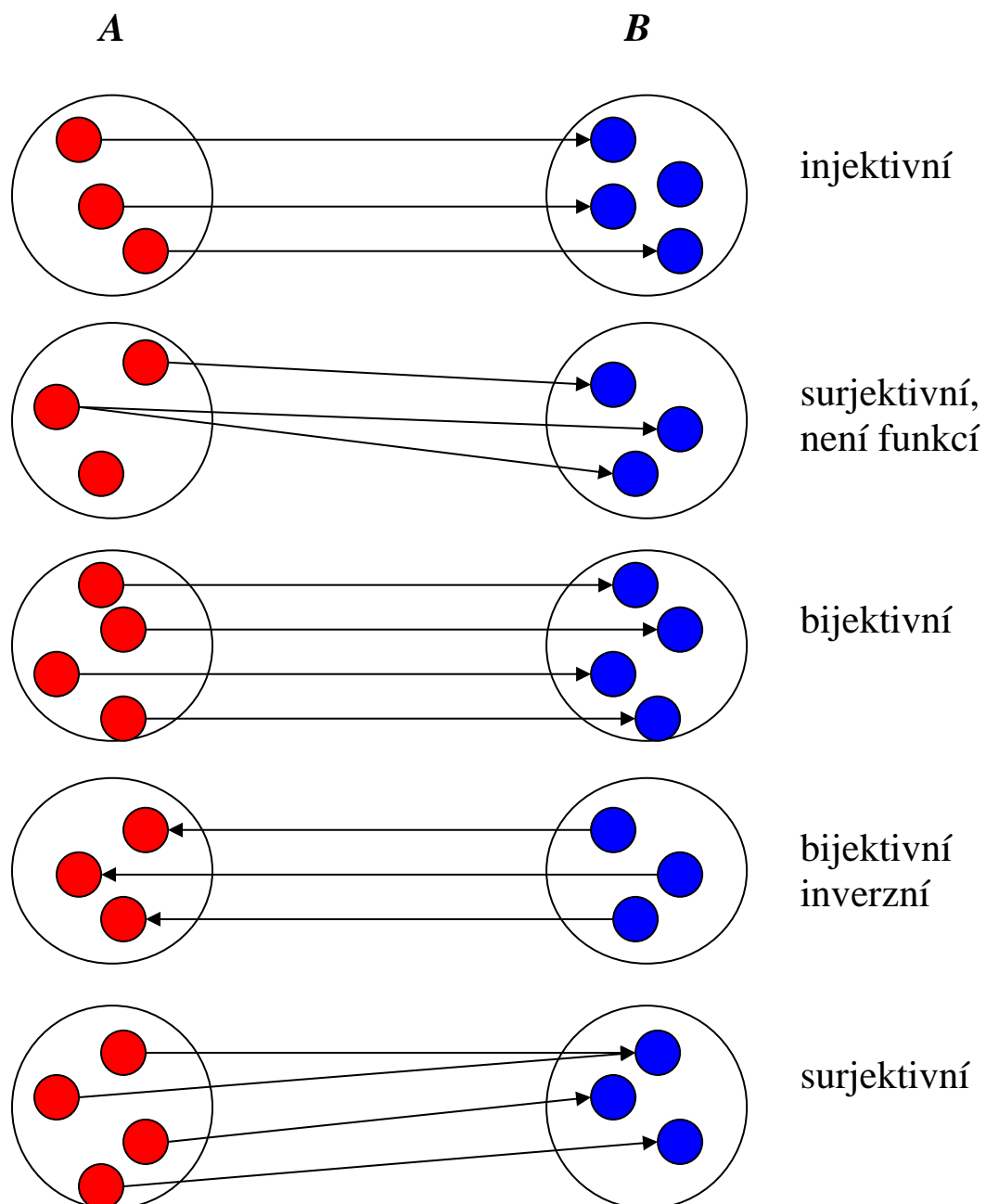
Hledané jádro je tedy množinou kořenů

$$\ker f(x) = \ker \frac{x^2 - 1}{x^2} = \{1, -1\} \quad (42)$$

Shrnutí učiva

Na následujících diagramech $f(A \rightarrow B)$ si můžeme prohlédnout jednotlivé výše probrané typy zobrazení

Obr. 5



Příklad 5:

Mějme zobrazení $f (R \rightarrow R)$ generovaná následujícími operátory:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^3 + 2x^2, \\ f_2(x) &= \sin x \\ f_3(x) &= \cos x \\ f_4(x) &= \sqrt{x+2} \\ f_5(x) &= 2x+1 \end{aligned} \tag{43}$$

Přiřaďte k jednotlivým zobrazením (43) následující atributy

- 1) Surjektivní
- 2) Liché
- 3) Sudé
- 4) Injektivní
- 5) Bijektivní

Upozorňujeme, že každému z uvedených zobrazení vyhovuje právě jeden z atributů.

Operace komposice funkcí

Mějme funkce $f(x), g(x)$. Operaci

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \tag{44}$$

nazýváme komposicí funkcí f a g v tomto pořadí.

Příklad 6:

vypočtěme operátor komponovaný z následujících funkcí

$$f(x) = \sin x \circ \sqrt{x} \circ (1-x^2) \circ \ln x \tag{45}$$

Řešení:

$$f(x) = \sin u \circ \sqrt{v} \circ 1 - w^2 \circ \ln x, \quad (46)$$

kde

$$u = \sqrt{v}, v = 1 - w^2, w = \ln x. \quad (47)$$

Máme tedy

$$f(x) = \sin \sqrt{1 - \ln^2 x}. \quad (48)$$

Povšimněme si, že operace komposice funkcí je obecně nekomutativní, tj. opět závislá na pořadí.

Elementární funkce

V tomto oddílu si ukážeme překvapující skutečnost, že ačkoli lze napsat neomezené množství různých operátorů, jejichž působením vzniká nekonečné množství různých funkcí, všechny operátory lze s pomocí operace komposice, inverze, (a samozřejmě elementárních operací známých ze základní školy, jako je sčítání, odčítání, násobení a dělení) vytvořit z jednoho jediného základního operátoru

$$\exp x \equiv e^x, \quad (49)$$

kde konstanta e je tzv. **Eulerovo číslo** (viz dále (117) a (245)). Tento operátor je pro matematiky přesně tím, čím jsou pro fyziky elementární částice. Ba ještě více, neboť tu skutečně jedinou, nejzákladnější částici, fyzika dosud nenalezla.



Leonhard Paul Euler (1707 – 1783)

Abychom pochopili jak je to možné, připomeňme si zde krátce definici logaritmu:

$$a = \log_z x \Leftrightarrow z^a = x. \quad (50)$$

Všechny známé funkce jsou utvořeny z jednodušších funkcí typu

$$\ln x, \log_a x, a^x, x^a, \sin x, \cos x, \quad (51)$$

a podobných. Připomeňme si, že logaritmus naturalis se logaritmuje při základu e , tj. $\ln x \equiv \log_e x$, u dekadického logaritmu je základem číslo 10, které se však explicitně neuvádí, tj. $\log x \equiv \log_{10} x$.

Funkce $\ln x$ je inverzní k elementární funkci $\exp x$, neboli

$$\ln x = \exp^{-1} x. \quad (52)$$

Funkci $\log_a x$ z ní můžeme jednoduše utvořit logaritmováním:

$$x = a^{\log_a x} \Rightarrow \ln x = \ln(a^{\log_a x}) = \log_a x \cdot \ln a, \quad (53)$$

odkud již dostáváme

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \quad (54)$$

Podobně

$$a = e^{\ln a}, \quad (55)$$

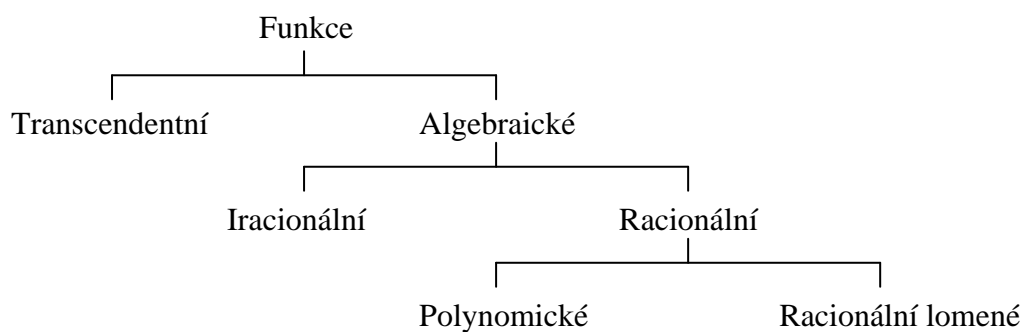
odkud

$$a^x = e^{x \ln a}, \quad (56)$$

nebo obráceně

$$x^a = e^{a \ln x}. \quad (57)$$

Klasifikace funkcí



Okolí bodu

Věta o okolí součtu bodů

K libovolnému okolí U bodu $L + M$ existuje takové okolí U_1 bodu L a takové okolí U_2 bodu M , že

$$\forall y \in U_1 \wedge \forall z \in U_2 : y + z \in U. \quad (58)$$

Důkaz:

Nechť U má poloměr r , tj.

$$U = (L + M - r, L + M + r). \quad (59)$$

Položme

$$U_1 = \left(L - \frac{r}{2}, L + \frac{r}{2} \right), \quad (60)$$

$$U_2 = \left(M - \frac{r}{2}, M + \frac{r}{2} \right).$$

Nechť $y = U_1$, $z = U_2$. Potom

$$L - \frac{r}{2} < y < L + \frac{r}{2}, \quad (61)$$

$$M - \frac{r}{2} < z < M + \frac{r}{2}.$$

Sečtením obou těchto nerovností máme

$$L + M - r < y + z < L + M + r, \quad (62)$$

neboli

$$y + z \in U. \quad (63)$$

Věta o okolí součinu bodů

K libovolnému okolí U bodu $L \cdot M$ existuje takové okolí U_1 bodu L a takové okolí U_2 bodu M , že

$$\forall y \in U_1 \wedge \forall z \in U_2 : y \cdot z \in U. \quad (64)$$

Důkaz:

Nejprve je dobré si uvědomit, že

$$x \in (K - r, K + r) \Leftrightarrow |x - K| < r. \quad (65)$$

Nechť

$$U = (LM - r, LM + r). \quad (66)$$

Položme dále

$$r_0 = \min\left(\frac{r}{r + |L| + |M|}, r\right),$$

$$U_1 = (L - r_0, L + r_0), \quad (67)$$

$$U_2 = (M - r_0, M + r_0).$$

Zjevně platí

$$\forall y \in U_1 \wedge \forall z \in U_2 : |y - L| < r_0 \wedge |z - M| < r_0. \quad (68)$$

Potom

$$\begin{aligned} |yz - LM| &= |yz - yM + yM - LM| \leq |y||z - M| + |M||y - L| < \\ &< |y|r_0 + |M|r_0 = (|y - L| + |L|)r_0 + |M|r_0 < \\ &< (r_0 + |L|)r_0 + |M|r_0 = (r_0 + |L| + |M|)r_0 \leq \\ &\leq (r + |L| + |M|)r_0 \leq (r + |L| + |M|)\frac{r}{r + |L| + |M|} = r. \end{aligned} \quad (69)$$

Tedy skutečně

$$\forall y \in U_1 \wedge \forall z \in U_2 : y \cdot z \in U \quad (70)$$

Věta o okolí podílu bodů

Nechť $M \neq 0$. Potom k libovolnému okolí U bodu $\frac{L}{M}$ existuje takové okolí U_1 bodu L a takové okolí U_2 bodu M , že

$$\forall y \in U_1 \wedge \forall z \in U_2 : \frac{y}{z} \in U. \quad (71)$$

Důkaz:

Nechť

$$U = \left(\frac{L}{M} - r, \frac{L}{M} + r \right). \quad (72)$$

Položme dále

$$r_0 = \min \left(\frac{|M|}{2}, \frac{rM^2}{2(|L| + |M|)} \right),$$

$$U_1 = (L - r_0, L + r_0), \quad (73)$$

$$U_2 = (M - r_0, M + r_0).$$

Zjevně platí

$$\forall y \in U_1 \wedge \forall z \in U_2 : |y - L| < r_0 \wedge \left| |z| - |M| \right| \leq |z - M| < r_0. \quad (74)$$

Podle věty o absolutní hodnotě rozdílu musí dále platit

$$|M| - |z| < r_0, \quad (75)$$

neboli

$$|z| > |M| - r_0 \geq |M| - \frac{|M|}{2} = \frac{|M|}{2}. \quad (76)$$

Odtud a z věty o absolutní hodnotě součinu a rozdílu plyne, že

$$\begin{aligned} \left| \frac{y}{z} - \frac{L}{M} \right| &= \frac{|yM - Lz|}{|z||M|} < \frac{2}{|M|^2} |My - Lz| = \frac{2}{|M|^2} |M||y| - |L||z| = \\ &= \frac{2}{|M|^2} |M||y| - |L||z| + |M||y| - |L||z| \leq \\ &\leq \frac{2}{|M|^2} (|M||y - L| + |L||M - z|) < \frac{2(|L| + |M|)}{M^2} r_0 \leq \\ &\leq \frac{2(|L| + |M|)}{M^2} \frac{rM^2}{2(|L| + |M|)} = r. \end{aligned} \quad (77)$$

Tedy skutečně

$$\forall y \in U_1 \wedge \forall z \in U_2 : \frac{y}{z} \in U \quad (78)$$

Limita funkce jedné reálné proměnné

Definice:

Nechť $a \in A$ je bodem funkce $f(A \rightarrow B)$. Potom ε -okolím bodu a rozumíme interval bodů

$$U_\varepsilon(a) = (f(a) - r, f(a) + r), \quad (79)$$

kde r je libovolné reálné číslo.

Podobně, δ -okolím bodu a rozumíme interval bodů

$$U_\delta(a) = (a - s, a + s), \quad (80)$$

kde s je opět libovolné reálné číslo.

Poznámka:

Je-li hodnota f v bodě a známa, často namísto označení $U_\varepsilon(a)$ používáme ekvivalentní označení $U_\varepsilon(f(a))$.

Pozorování:

Čísla r a s nejsou vzájemně nezávislá – jakmile zvolíme jedno z nich, druhé je pak jednoznačně určeno operátorem f .

Definice:

Nechť $a \in A$ je bodem funkce $f(A \rightarrow B)$. Potom redukovaným ε -okolím bodu a rozumíme množinu intervalů

$$U_\varepsilon^*(a) = \{(f(a) - r, f(a)); (f(a), f(a) + r)\}, \quad (81)$$

kde r je libovolné reálné číslo.

Podobně, redukovaným δ -okolím bodu a rozumíme interval bodů

$$U_\delta^*(a) = \{(a - s, a); (a, a + s)\}, \quad (82)$$

kde s je opět libovolné reálné číslo.

Definice limity funkce v bodě

Říkáme, že funkce f má v bodě a limitu L , což zapisujeme symbolem

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \quad (83)$$

jestliže k libovolnému okolí $U_\delta^*(a)$ existuje okolí

$$U_{\varepsilon}(a) = (L - r, L + r). \quad (84)$$

Příklad 1:

Dokažme, že funkce $f(x) = 2x - 5$ má v bodě 3 limitu 1.

Řešení:

Nechť

$$U_{\varepsilon}(3) = (1 - r, 1 + r) \quad (85)$$

je libovolné ε -okolí bodu 3. Zvolme okolí

$$U_{\delta}(3) = \left(3 - \frac{r}{2}, 3 + \frac{r}{2}\right). \quad (86)$$

Jestliže $x \in U_{\delta}^*(3)$, znamená to, že

$$3 - \frac{r}{2} < x < 3 + \frac{r}{2}, \quad (87)$$

neboli (vynásobením dvěma a odečtením čísla 5)

$$1 - r < 2x - 5 < 1 + r, \quad (88)$$

což ale neznamena nic jiného, než že

$$f(x) \in U_{\varepsilon}(3). \quad (89)$$

Věta o jednoznačnosti limity funkce v bodě

Funkce f nemůže mít v daném bodě více než jednu limitu

Důkaz:

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že funkce f má v nějakém bodě a dvě různé limity $L, M, L \neq M$.

Zvolme taková dvě okolí $U_{\varepsilon_L}(a), U_{\varepsilon_M}(a)$ pro něž platí

$$U_{\varepsilon_L}(a) \cap U_{\varepsilon_M}(a) = \emptyset. \quad (90)$$

K okolí $U_{\varepsilon_L}(a)$, resp. $U_{\varepsilon_M}(a)$ existují okolí $U_{\delta_L}^*(a)$, resp. $U_{\delta_M}^*(a)$ taková, že

$$\forall x \in U_{\delta_L}^*(a), \text{ resp. } \forall x \in U_{\delta_M}^*(a): f(x) \in U_{\varepsilon_L}(a), \text{ resp. } f(x) \in U_{\varepsilon_M}(a). \quad (91)$$

Potom ale

$$\begin{aligned} \forall x \in U_{\delta_L}^*(a) \cap U_{\delta_M}^*(a): f(x) \in U_{\varepsilon_L}(a) \wedge f(x) \in U_{\varepsilon_M}(a) &\Rightarrow \\ \Rightarrow f(x) \in \{U_{\varepsilon_L}(a) \cap U_{\varepsilon_M}(a)\} = \emptyset. &\quad (92) \end{aligned}$$

Věta o limitě součtu, součinu a podílu funkcí

Nechť binární operátor \bullet provádí některou z binárních operací $+, -, \cdot, /$.

Nechť dále existují limity

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= L, \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) &= M. \end{aligned} \quad (93)$$

Potom rovněž i funkce $h = f \bullet g$ má v bodě a limitu a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \bullet g(x)) = L \bullet M = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \bullet \lim_{x \rightarrow a} g(x). \quad (94)$$

Důkaz:

Nechť $U_\varepsilon(a)$ je libovolné okolí obrazu $L \bullet M$ bodu a ,
 $U_{\varepsilon_L}(a)$, resp. $U_{\varepsilon_M}(a)$ taková okolí obrazu L , resp. M bodu a , že

$$\forall (y \in U_{\varepsilon_L}(a), z \in U_{\varepsilon_M}(a)) : y \bullet z \in U_\varepsilon(a). \quad (95)$$

Protože $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, existuje k $U_{\varepsilon_L}(a)$ takové okolí $U_{\delta_L}(a)$ bodu a ,
že

$$\forall x \in U_{\delta_L}^*(a) : f(x) \in U_{\varepsilon_L}(a). \quad (96)$$

Protože dále $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, existuje k $U_{\varepsilon_M}(a)$ takové okolí $U_{\delta_M}(a)$
bodu a , že

$$\forall x \in U_{\delta_M}^*(a) : g(x) \in U_{\varepsilon_M}(a). \quad (97)$$

Položme

$$U_\delta(a) = U_{\delta_L} \cap U_{\delta_M}. \quad (98)$$

Potom

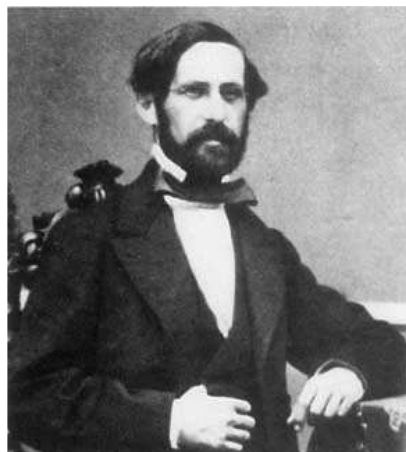
$$\forall x \in U_\delta^*(a) : y = f(x) \in U_{\varepsilon_L}(a) \wedge z = g(x) \in U_{\varepsilon_M}(a). \quad (99)$$

Proto

$$\forall x \in U_\delta^*(a) : h(x) = f(x) \bullet g(x) \in U_\varepsilon(a). \quad (100)$$

Spojítost funkce

Heineova definice spojitosti



Heinrich Eduard Heine (1821 – 1881)

Funkce f je spojitá v bodě $c \in D(f)$ právě tehdy, jestliže pro každou posloupnost (x_n) v $D(f)$ platí implikace

$$x_n \rightarrow c \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(c). \quad (101)$$

Věta o spojitosti součtu, součinu a podílu funkcí

Nechť funkce f, g , jsou spojitě v bodě c . Potom i funkce $h = f \bullet g$, kde $g(c) \neq 0$, je spojitá v bodě c .

Důkaz:

Chceme dokázat, že pro každou posloupnost (x_n) v $D(f \bullet g)$ platí

$$x_n \rightarrow c \Rightarrow (f \bullet g)(x_n) \rightarrow (f \bullet g)(c). \quad (102)$$

Z předpokladu spojitosti funkcí f a g v bodě c plyne, že

$$\lim_{x_n \rightarrow c} f(x_n) = f(c) \wedge \lim_{x_n \rightarrow c} g(x_n) = g(c). \quad (103)$$

Můžeme tedy psát

$$\lim_{x_n \rightarrow c} (f \bullet g)(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow c} f(x_n) \bullet g(x_n) = f(c) \bullet g(c) = (f \bullet g)(c) = h(c). \quad (104)$$

Věta o spojitosti komposice funkcí

Nechť funkce g je spojitá v bodě c a funkce f spojitá v bodě $d = g(c)$.
Potom složená funkce $h = f \circ g$ je spojitá v bodě c .

Důkaz:

Chceme dokázat, že pro každou posloupnost (x_n) v $D(f \circ g)$ platí

$$x_n \rightarrow c \Rightarrow (f \circ g)(x_n) \rightarrow (f \circ g)(c), \quad (105)$$

neboli

$$x_n \rightarrow c \Rightarrow f(g(x_n)) \rightarrow f(g(c)). \quad (106)$$

Z předpokladu spojitosti funkcí f a g v bodě c plyne, že

$$\lim_{x_n \rightarrow c} f(x_n) = f(c) \wedge \lim_{x_n \rightarrow c} g(x_n) = g(c). \quad (107)$$

Můžeme tedy psát

$$\lim_{x_n \rightarrow c} (f \bullet g)(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow c} f(x_n) \bullet g(x_n) = f(c) \bullet g(c) = (f \bullet g)(c) = h(c). \quad (108)$$

Jestliže (x_n) je posloupností v $D(f \circ g)$, je rovněž posloupností v $D(g)$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ položme

$$y_n = g(x_n). \quad (109)$$

Potom (y_n) je posloupnost v $D(f)$. Z předpokladů dokazované věty plyne

$$\begin{aligned} (x_n \rightarrow c \Rightarrow y_n = g(x_n) \rightarrow g(c) = d) \wedge (y_n \rightarrow d \Rightarrow f(y_n) \rightarrow f(d)) \Rightarrow \\ \Rightarrow h(x_n) = f(g(x_n)) \rightarrow f(g(c)) = h(c). \end{aligned} \quad (110)$$

Singularity funkce

Definice:

Body definičního oboru $D(f)$ funkce f nazýváme **regulárními body funkce f** .

Body mimo její definiční obor, pak nazýváme **singulárními body funkce f** , nebo krátce **singularitami funkce f** .

Typickými příklady singularit jsou nuly ve jmenovateli racionálních lomených funkcí (tomuto typu říkáme **bodové singularity**), záporná čísla v odmocninách, nekladná čísla v argumentech logaritmů, apod. (tento typ nazýváme **spojitými singularitami**). Standardní metoda výpočtu singularit vede k řešení odpovídajících rovnic (bodové singularity) či nerovnic (spojité singularity).

Příklady:

Vypočtete singularity následujících funkcí:

$$f(x) = \frac{x}{|x+2|-3}, \quad S(f) \in \{-5; 1\}$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{|2x+1|+|2x-1|-3}, \quad S(f) \in \left\{ \frac{3}{4}; -\frac{3}{4} \right\}$$

$$f(x) = \frac{5x^2-x+1}{x^2+2|x-1|-6}, \quad S(f) \in \{1+\sqrt{5}; 1-\sqrt{5}; -4; 2\}$$

$$f(x) = \frac{x}{\left| \frac{x+2}{x+6} - \frac{x-1}{x-4} \right|}, \quad S(f) \in \left\{ 2; -\frac{2}{7}; -\frac{7}{2} \right\}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 3}{\left| x^2 - 2x + 3 \right| - 3}, \quad S(f) \in \{0; 2\}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x}}, \quad S(f) \in \left\{ \frac{1}{8} \right\}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + |4x+1|}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} - 2}, \quad S(f) \in \left\{ \frac{41}{16} \right\}$$

$$f(x) = \frac{|x^2 - 3x + 2| + x^3 - 2}{2\sqrt{x+18} + \sqrt{4x-3} - 15}, \quad S(f) \in \{7\}$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\frac{7-x}{3+x}} + 3\sqrt{\frac{3+x}{7-x}} - 4}, \quad S(f) \in \{2; -2\}$$

$$f(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} - 6}, \quad S(f) \in \{-24; -88; 3\}$$

$$f(x) = \frac{|\cos^2 |x||}{\sqrt[3]{3x+28} - \sqrt[3]{3x-28} - 2}, \quad S(f) \in \{12; -12\}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3-4\sqrt{1-x}} - \sqrt{x-1}}, \quad S(f) \in \{1\}$$

$$f(x) = \left(\sqrt{|5x-7| - 3x-1} \right)^{-1}, \quad S(f) \in \left\langle \frac{3}{4}; 4 \right\rangle$$

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{x-2}{3x-1}}, \quad S(f) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$$

$$f(x) = \sqrt{3 - |2x+7|}, \quad S(f) = (-\infty; -5) \cup \langle -2; \infty \rangle$$

$$f(x) = \ln(|x+1| - |x-2| + |x-5| - 6), \quad S(f) = \langle -4; 8 \rangle$$

$$f(x) = \ln(|x-3| - |2x+1|), \quad S(f) = \left\langle -4; \frac{2}{3} \right\rangle$$

$$f(x) = \ln\left(2 - \frac{2x-2}{x+3}\right), \quad S(f) = (-\infty; -3)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3 - \frac{2x-5}{x+2}}}, \quad S(f) \in \langle -11; -2 \rangle$$

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x - 14}, \quad S(f) \in \left(-\frac{7}{2}; 2\right)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{3(x+2)^2 - (2x-5)(x+2)}}, \quad S(f) \in \langle -11; -2 \rangle$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 7}}, \quad S(f) \in (-2; 1)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 10x + 21}}, \quad S(f) = (2; 3) \cup (5; 7)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{5-x}{x-1} + \frac{1+4x}{2x+2} - 1\right), \quad S(f) = \left(-\infty; -\frac{11}{5}\right) \cup (-1; 1)$$

$$f(x) = \ln(2|x+3| - 10 + x^2),$$

$$S(f) = \langle 1 - \sqrt{17}; -1 + \sqrt{5} \rangle$$

$$f(x) = \ln(|3x-2| - |2x-3|),$$

$$S(f) = \langle -1; 1 \rangle$$

$$f(x) = \ln\left(4 - \left|\frac{x-5}{x+1}\right|\right),$$

$$S(f) = \left(-3; \frac{1}{5}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{6-x} - \sqrt{x^2+x-12}},$$

$$S(f) \in (-\infty; -4) \cup \left\langle 3; \frac{48}{13} \right\rangle$$

$$f(x) = \sqrt{|6x^2 - 5x| - 6},$$

$$S(f) \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$$

$$f(x) = \sqrt{3x-4} - \sqrt{6-x},$$

$$S(f) \in (2; 6)$$

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2 - 5x - 24} - x - 2},$$

$$S(f) \in (-3; \infty)$$

$$f(x) = \ln(x - 3\sqrt{x} - 4),$$

$$S(f) \in (-\infty; 16)$$

$$f(x) = \frac{2x}{2x^3 - 3x^2 - 3x + 2},$$

$$S(f) \in \left\{-1; 2; \frac{1}{2}\right\}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1},$$

$$S(f) \in \{1\}$$

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 3}{x^4 + x^2 - 20},$$

$$S(f) \in \{2; -2\}$$

$$f(x) = \frac{5x^3 - 4x^2 + x - 2}{x^3(x^3 - 7) - 12(18 + x^3)},$$

$$S(f) \in \{3; -2\}$$

$$f(x) = \frac{7x^5}{12x^4 - 25x^3 + 25x - 12}, \quad S(f) \in \left\{1; \frac{4}{3}; \frac{3}{4}\right\}$$

$$f(x) = \frac{x}{5x^4 - 26x^3 + 10x^2 - 26x + 5}, \quad S(f) \in \left\{5; \frac{1}{5}\right\}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6}, \quad S(f) \in \left\{3; 2; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$$

$$f(x) = \frac{x}{3^{3x-2} - 5^x}, \quad S(f) \in \left\{\frac{\log 9}{\log 9 - \log 5}\right\}$$

$$f(x) = \frac{x}{5^{1-x} - 7^{x-1}}, \quad S(f) \in \{1\}$$

$$f(x) = \frac{x}{2^{2x+1} + 4^{x+1} + 16^{\frac{x}{2}} - 28}, \quad S(f) \in \{1\}$$

$$f(x) = \frac{x}{4^x + 3^{x+4} - 4^{x+3} + 3^{x+2}}, \quad S(f) \in \left\{\frac{\log \frac{7}{10}}{\log \frac{3}{4}}\right\}$$

$$f(x) = \frac{x}{2^{2x+1} + 2^{x+2} - 16}, \quad S(f) \in \{1\}$$

$$f(x) = \frac{x}{3(4^x + 9^{x+1}) - 2\left(3 \cdot 4^{x+1} - \frac{9^{x+1}}{4}\right)}, \quad S(f) \in \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$f(x) = \frac{x}{2^x \left(\frac{1}{8}\right)^{1-x} + 2^{1-x} \left(\frac{1}{8}\right)^x - 1}, \quad S(f) \in \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$f(x) = \frac{x}{6^{1+x} + 6^{1-x} - 13}, \quad S(f) \in \left\{ \pm \frac{\log 3 - \log 2}{\log 6} \right\}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^x - x^{-x} - 3(1 + x^{-x})}, \quad S(f) \in \{2; -1\}$$

$$f(x) = \frac{x}{4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1} - 6}, \quad S(f) \in \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3^{4x} + 1} + \sqrt{2 \cdot 3^{4x} + 3} - 5}, \quad S(f) \in \left\{ \frac{1}{4} \right\}$$

$$f(x) = \frac{x}{16^{\sin^2 x} + 2^{2(1+\cos(2x))} - 10}, \quad S(f) \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

$$f(x) = \frac{x}{\log(x^{\log x}) - 1}, \quad S(f) \in \left\{ 10, \frac{1}{10} \right\}$$

$$f(x) = \frac{x}{(\log x)^{\log x} - 1}, \quad S(f) \in \{10, 1\}$$

$$f(x) = \frac{x}{5 \log x^{\frac{1}{2}} - 4 \log x^{\frac{1}{6}} + \frac{1}{2} \log x^8 + \log x^5 - 9}, \quad S(f) \in \left\{ 10^{\frac{9}{10}} \right\}$$

$$f(x) = \frac{x}{\log(x+3) + \log(x-2) + \log 2 - 2}, \quad S(f) \in \{7\}$$

$$f(x) = \frac{x}{\log(x^3 + 1) - \log(x + 1) - \log x + \log 6 - \log 7},$$

$$S(f) \in \left\{ \frac{3}{2}, \frac{2}{3} \right\}$$

$$f(x) = \frac{x}{(\log_x 3) \left(\log_{\frac{x}{3}} 3 \right) - \log_{\frac{x}{9}}^2 3},$$

$$S(f) \in \{9\}$$

$$f(x) = \frac{x}{\log x^{2 \log \sqrt{x}} + \log \frac{1}{x^2} - 3},$$

$$S(f) \in \left\{ 10^3, \frac{1}{10} \right\}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^{\log^2 x^2 - 3 \log x - \frac{9}{2}} - 10^{-2 \log x}},$$

$$S(f) \in \left\{ 10^{\frac{5}{4}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right\}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sum_{i=1}^{\infty} \left(\log x^{\frac{1}{2^i}} \right) - 2},$$

$$S(f) \in \{10\}$$

Metody výpočtu limit funkcí jedné reálné proměnné

V této kapitole si na celkem 50 modelových příkladech demonstrujeme hlavní postupy používané při výpočtu limit.

Limity racionálních lomených funkcí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x + 3) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x+2) - (x+2)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 5x^2 + 5x - 4}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - x + 1) = 13$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 - x^3 + 3x^2 - x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 + x^2 + 4x + 3) = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^4 - x^3 + 3x^2 - x - 7}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 - 3x^2 + 6x - 7) = -18$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^5 - (5x+1)}{x^5 + x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2}{x^5 + x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x^3 + 5x^2 + 10x + 10)}{x^2(x^3 + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 5x^2 + 10x + 10}{x^3 + 1} = 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 2x + x - 2)^{20}}{(x^3 + 4x - 16x + 16)^{10}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x(x-2) + (x-2)]^{20}}{[(x+4)(x^2 - 4x + 4)]^{10}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[(x-2)(x+1)]^{20}}{[(x+4)(x-2)^2]^{10}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}} = \\ &= \frac{3^{20}}{6^{10}} = \frac{3^{20}}{2^{10}3^{10}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^2 - 4) - 2(x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(x-2)}{(x^2 - 4)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)(6x^2 + 5x + 1) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^3 + 11x^2 + 6x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (6x^2 + 11x + 6) = 6$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x^2-5x+4} + \frac{x-4}{3(x^2-3x+2)} \right) = \\
& = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x-2)(x+2) + (x-1)(x-4)^2}{3(x-1)^2(x-2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2-4) + (x-4)^2}{3(x-1)(x-2)(x-4)} = \\
& = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 8x + 4}{3(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{4(x-1)}{3(x-2)(x-4)} = 0
\end{aligned}$$

Limity iracionálních lomených funkcí

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{(\sqrt[4]{x} + 2)(\sqrt[4]{x} - 2)} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt[4]{x} + 2} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1+2x-9}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x(\sqrt{x}+1) = 2$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)}{x-2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+2} + 2) = 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{\sqrt[3]{2x^3 - 2x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x}}}{\sqrt[3]{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[6]{\frac{\left(\frac{x+3}{x}\right)^3}{\left(\frac{2x^2-2}{x^2}\right)^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[6]{\frac{x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 27x}{4(x^4 - 2x^2 + 1)}} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sqrt{10+x}-3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sqrt{10+x}-3} \frac{\sqrt{10+x}+3}{\sqrt{10+x}+3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)(\sqrt{10+x}+3)}{x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{10+x}+3) = \sqrt{10}+3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - (1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x-x^2 - (1+x)^2}{x[\sqrt{1-2x-x^2} + (1+x)]} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2 - 4x}{x[\sqrt{1-2x-x^2} + 1+x]} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(x+2)}{\sqrt{1-2x-x^2} + 1+x} = -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{(x-1)^2} \right)}{2x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{x^2+x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x-x^2}{(x^2+x) \left[\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2} + 2\sqrt[3]{8+3x-x^2} + 4 \right]} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3-x)}{x(x+1) \left[\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2} + 2\sqrt[3]{8+3x-x^2} + 4 \right]} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-x}{(x+1) \left[\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2} + 2\sqrt[3]{8+3x-x^2} + 4 \right]} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

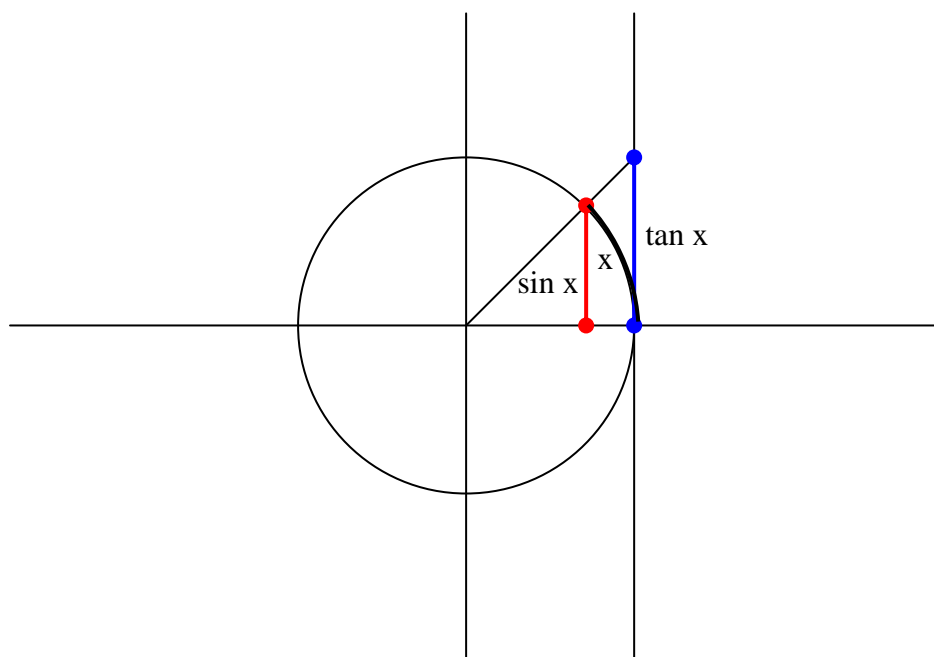
Limity goniometrických funkcí

Ze školy víme, že v limitě $x \rightarrow 0$ se funkce $\sin x$ stále více podobá funkci x (tzv. aproximace malých výchylek). Vskutku se dá celkem snadno dokázat, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (111)$$

Důkaz:

Obr. 6



Z konstrukce goniometrických funkcí na jednotkové kružnici plyne zřejmá nerovnost (viz obr. 6)

$$\sin x \leq x \leq \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad (112)$$

odkud vydělením funkcí $\sin x$ ihned dostáváme

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}. \quad (113)$$

Zapůsobíme-li na celou tuto nerovnici limitou $x \rightarrow 0$, dostáváme

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \leq 1, \quad (114)$$

odkud a z věty o limitě podílu, již plyne dokazovaná rovnost.

Uvedený důkaz je jednoduchým příkladem aplikace tzv. **sandwich** **teorému**, o kterém budeme ještě hovořit za chvíli, v samostatném oddílu. Získanou limitu však využijeme již v tomto oddílu k výpočtu celé řady různých limit.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot(ax) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(ax)} \lim_{x \rightarrow 0} \cos(ax) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{ax} = \frac{1}{a}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{\cos x (1 - \cos^2 x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{\cos x (1 - \cos x) (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x (1 + \cos x)} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin x \cdot \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{\sin x \cdot \cos x (1 - \cos^2 x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{\cos x (1 - \cos x) (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x) + \tan^2 x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x + \tan^2 x}{x \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x (2 \cos^2 x + 1)}{x \sin x \cos^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x) - \cos(2x) - 1}{\cos x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin x \cos x - (2 \cos^2 x - 1) - 1}{\cos x - \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x}{\cos x - \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos x (\sin x - \cos x)}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (-2 \cos x) = -\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin(2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{2x \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{2x \sin x \cos x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{2x \sin x \cos x (1 + \cos x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 + \cos x + \cos^2 x)}{2x \cos x (1 + \cos x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{2 \cos x (1 + \cos x)} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 x - 3 \tan x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 x - 3 \tan x}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{(2 \sin^2 x - 3 \cos^2 x) \sin x}{\left(\sqrt{3} \cos x - \sin x\right) \cos^3 x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{(1 - 4 \cos^2 x) \sin x}{\left(\sqrt{3} \cos x - \sin x\right) \cos^3 x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin x (1 - 4 \cos^2 x) (\sqrt{3} \cos x + \sin x)}{\cos^3 x (3 \cos^2 x - \sin^2 x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin x (1 - 4 \cos^2 x) (\sqrt{3} \cos x + \sin x)}{-\cos^3 x (1 - 4 \cos^2 x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin x (\sqrt{3} \cos x + \sin x)}{-\cos^3 x} = -24
\end{aligned}$$

Nevlastní limity a limity v nevlastních bodech

Definice:

Nevlastní limitou rozumíme limitu funkce v některém jejím bodě, jejíž hodnota leží v $+\infty$ nebo $-\infty$. Typickým případem, kdy toto nastává, je dělení reálného čísla nulou, jež vede v limitě vždy ke kladnému, či zápornému nekonečnému výsledku.

Nevlastním bodem limity rozumíme bod v $+\infty$ nebo $-\infty$, v němž počítáme limitu dané funkce.

Příklady výpočtu limit v nevlastních bodech:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x^2 + 2}{7x^3 - 5x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3}}{7 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}} = \frac{3}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = \infty.$$

Poslední limita je tedy limitou v nevlastním bodě a zároveň i nevlastní limitou. Na základě výše uvedených příkladů můžeme vytvořit obecný

závěr ohledně limit racionálních lomených funkcí v nevlastních bodech:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_1 x^n + b_2 x^{n-1} + \dots + b_n} = \begin{cases} 0 & \text{pro } m < n \\ \frac{a_1}{b_1} & \text{pro } m = n \\ \infty & \text{pro } m > n \end{cases} \quad (115)$$

Analogický závěr můžeme učinit i pro limitu obdobných funkcí v opačném nevlastním bodě:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_1 x^n + b_2 x^{n-1} + \dots + b_n} = \begin{cases} 0 & \text{pro } m < n \\ \frac{a_1}{b_1} & \text{pro } m = n \\ \pm \infty & \begin{cases} m - n > 0 \text{ sudé} \\ m - n > 0 \text{ liché} \end{cases} \end{cases} \quad (116)$$

Poznámka:

Také Eulerovo číslo je definováno jako limita v nevlastním bodě:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (117)$$

Vztahy (115), (116) dovolují v případě určování limit v nevlastních bodech všech racionálních funkcí postupovat mnohem rychleji.

Příklady:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2}{4x^3 + 2x^2 - 2x - 1} = \frac{1}{4},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x-2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)^{20} (3x)^{30}}{(2x)^{50}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x)^{30}}{(2x)^{30}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$$

Analogických postupů však lze použít též pro výpočet limit iracionálních polynomických funkcí v nevlastních bodech:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}}{1 + \frac{2}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{\sqrt[3]{2x^3 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{x}}}{\sqrt[3]{2 - \frac{2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[5]{x^4 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^4}} - \sqrt[5]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\pm\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1)}{\pm\sqrt{x^2 + x + 1} \pm \sqrt{x^2 - x + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\pm\sqrt{x^2 + x + 1} \pm \sqrt{x^2 - x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\pm\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \pm \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \begin{matrix} \dots & 1 \\ \dots & \dots \\ \dots & -1 \end{matrix} \end{aligned}$$

U posledních dvou limit si povšimněme, jak se mění znaménka odmocnin i samotného limitního bodu v případě, že limitu počítáme v záporném nevlastním bodě. Jedná se o speciální případ substituce, o níž obecněji pojednává hned následující odstavec.

Substituční metoda výpočtu limit

Metodu si demonstrujeme na následujících jednoduchých příkladech:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}}{\frac{x}{2} + 2} \right)^5 = \lim_{u = \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}}{\frac{x}{2} + 2}} u^5 = \lim_{u = \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}} u^5 = \lim_{u \rightarrow 2} u^5 = 32.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) &= \lim_{y=1-x=0} y \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}y\right) = \\ &= \lim_{y=0} y \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}y - \sin \frac{\pi}{2}y \cos \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}y + \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}y} = \\ &= \lim_{y=0} y \frac{\cos \frac{\pi}{2}y}{\sin \frac{\pi}{2}y} = \lim_{y=0} \frac{\frac{\pi}{2}y}{\sin \frac{\pi}{2}y} \lim_{y=0} \frac{\cos \frac{\pi}{2}y}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\tan x + \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \right) = \\
&= \lim_{y = x - \frac{\pi}{2} \rightarrow 0} \frac{y \sin \left(y + \frac{\pi}{2} \right) + \cos \left(y + \frac{\pi}{2} \right)}{y \cos \left(y + \frac{\pi}{2} \right)} = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \left(\sin y \cos \frac{\pi}{2} + \cos y \sin \frac{\pi}{2} \right) + \left(\cos y \cos \frac{\pi}{2} + \sin y \sin \frac{\pi}{2} \right)}{y \left(\cos y \cos \frac{\pi}{2} + \sin y \sin \frac{\pi}{2} \right)} = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \cos y - \sin y}{y \sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos y - y \sin y - \cos y}{\sin y + y \cos y} = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \sin y}{\sin y + y \cos y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y + y \cos y}{2 \cos y - y \cos y} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{4} - \sin \frac{x}{4} \right)} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{4} - \sin \frac{x}{4} \right) \left(1 + \sin \frac{x}{2} \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\left(\cos \frac{x}{4} - \sin \frac{x}{4} \right) \left(1 + \sin \frac{x}{2} \right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{4} + \sin \frac{x}{4} \right)}{\left(\cos^2 \frac{x}{4} - \sin^2 \frac{x}{4} \right) \left(1 + \sin \frac{x}{2} \right)} = \\
&= \lim_{y = \frac{x}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2y)(\cos y + \sin y)}{(\cos^2 y - \sin^2 y)(1 + \sin(2y))} = \\
&= \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2y)(\cos y + \sin y)}{\cos(2y)(1 + \sin(2y))} = \\
&= \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos y + \sin y)}{(1 + \sin(2y))} = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \sqrt{\cos \frac{2}{x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \sqrt{\cos^2 \frac{1}{x} - \sin^2 \frac{1}{x}} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \sqrt{\cos^4 \frac{1}{x} - \cos^2 \frac{1}{x} \sin^2 \frac{1}{x}} \right) = \\
&= \lim_{y = \frac{1}{x} \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos^4 y - \cos^2 y \sin^2 y}}{y^2} = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos^4 y - \cos^2 y (1 - \cos^2 y)}}{y^2} = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2 \cos^4 y - \cos^2 y}}{y^2} = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 y \cos(2y)}{y^2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos y \sqrt{\cos(2y)}} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 y (1 - 2 \sin^2 y)}{y^2} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 y) + 2 \cos^2 y \sin^2 y}{y^2} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{y} \right)^2 \lim_{y \rightarrow 0} (1 + 2 \cos^2 y) = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Sandwich theorem

Tuto metodu jsme již naznačili při výpočtu veledůležité limity

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$. Zde si nyní podrobněji ukážeme její princip na příkladu

výpočtu dalších dvou naprosto klíčových limit, se kterými budeme pracovat v následujících kapitolách. Jedná se o limity

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}. \quad (118)$$

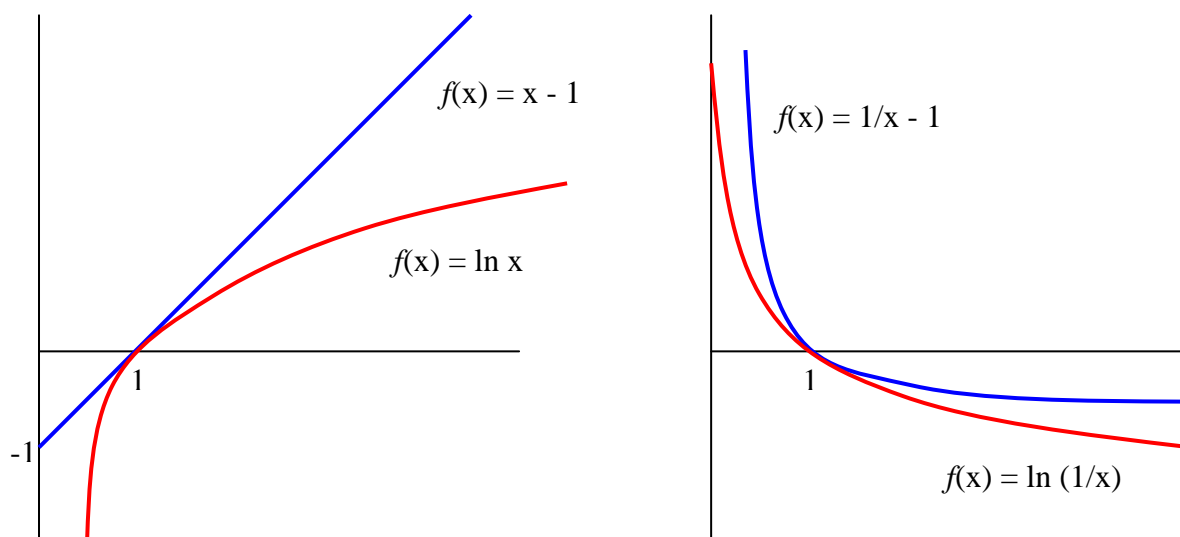
Započneme konstrukcí první z těchto limit: z vlastností přirozených logaritmů ihned plyne nerovnost (viz obr. 7)

$$\forall y \in (1, \infty) : \ln y \leq y - 1. \quad (119)$$

Zavedeme-li substituci $x = \frac{1}{y}$, dostáváme zcela analogicky (viz obr. 7)

$$\forall x \in (1, \infty) : \ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1. \quad (120)$$

Obr. 7



Jelikož

$$\ln \frac{1}{x} = \ln 1 - \ln x = -\ln x, \quad (121)$$

dostáváme z (120) nerovnost

$$\forall x \in (1, \infty) : -\ln x \leq \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}, \quad (122)$$

neboli, srov. (122) se (119),

$$\forall x \in (1, \infty): \frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1. \quad (123)$$

Vydělíme-li poslední nerovnost výrazem $x-1$, získáme nerovnost.

$$\forall x \in (1, \infty): \frac{1}{x} \leq \frac{\ln x}{x-1} \leq 1. \quad (124)$$

Provedeme-li analogickou úvahu pro $\forall x \in (0,1)$, dospějeme obdobnou sekvencí kroků k závěru, že

$$\forall x \in (0,1): \frac{1}{x} \leq \frac{\ln x}{x-1} \leq 1, \quad (125)$$

Protože ale

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1, \quad (126)$$

máme tak vyšetřovanou funkci sevřenu jako šunku v sendviči, mezi dvě housky, reprezentované jinými funkcemi, které mají shodné limity. Limita hledané funkce tak nemá nikam úniku a musí pro ni platit

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1. \quad (127)$$

Provedeme-li nyní substituci $x = e^z$, což je regulární, neboť

$$\forall z \in \mathbb{R}: e^z \in \mathbb{R}^+, \quad (128)$$

můžeme limitu (127) přepsat do tvaru

$$\lim_{e^z \rightarrow 1} \frac{\ln e^z}{e^z - 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1. \quad (129)$$

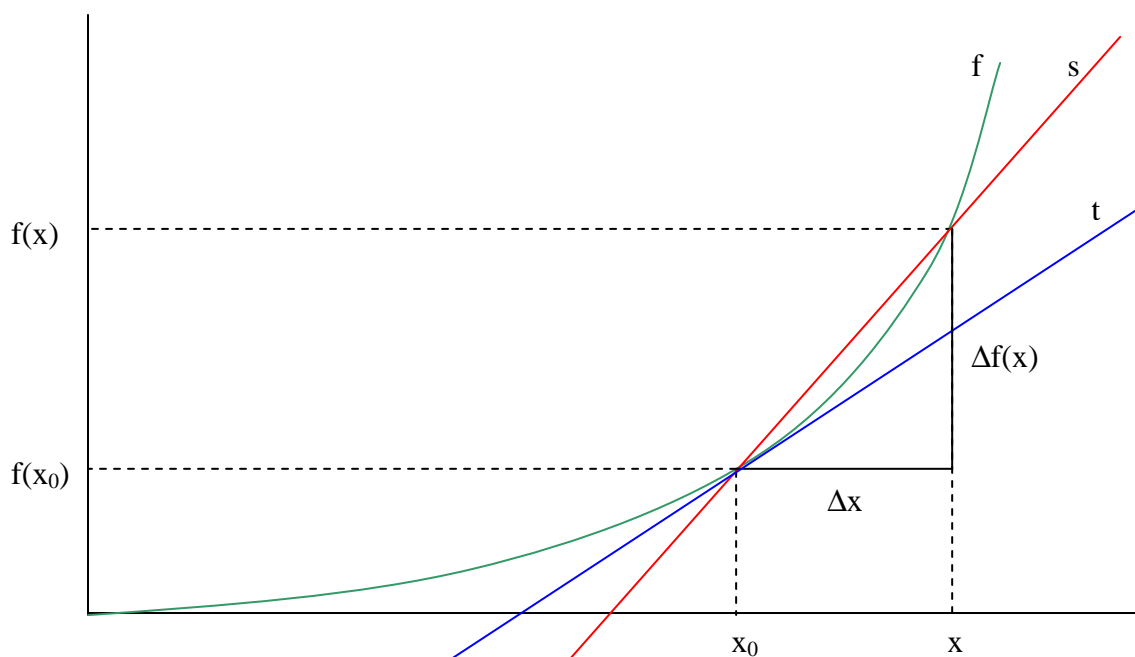
Proto rovněž

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{z}{e^z - 1}} = \frac{\lim_{z \rightarrow 0} 1}{\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1}} = 1. \quad (130)$$

Přehled k diferenciálnímu počtu funkce jedné reálné proměnné

Derivace, difference a diferenciál funkce

Obr. 8



Definice:

Uvažujme funkci f . Směrnicí tečny grafu této funkce v nějakém bodě x_0 nazveme **derivací funkce f** v bodě x_0 , což značíme $f'(x_0)$.

Při konstrukci derivace začneme nejprve konstrukcí sečny s , podle grafu 8, kterou jsme zde označili červenou barvou. Její směrnice je zřejmě dána výrazem

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (131)$$

Výraz

$$\Delta f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Delta x \quad (132)$$

nazýváme **diferencí funkce** f v bodě x_0 .

Z grafu 8 je zřejmé, že položíme-li $\Delta x \rightarrow 0$, začne nám zkoumaná sečna splývat s hledanou tečnou. Limitu $\Delta x \rightarrow 0$ označujeme podle Leibnize jako dx , jí odpovídající diferencii pak analogicky jako df .

Příklad 1:

Vypočtěmež derivaci paraboly $f = x^2$.

Řešení:

Změní-li se x na $x + dx$, změní se x^2 na $(x + dx)^2 = f + df$, neboli

$$f + df = f + \frac{df}{dx} dx = (x + dx)^2 = x^2 + 2x dx + dx^2. \quad (133)$$

Protože ale $f = x^2$, máme rovnost

$$\frac{df}{dx} dx = 2x dx + dx^2 = dx(2x + dx). \quad (134)$$

Vydělením této rovnice výrazem dx odtud dostáváme

$$\frac{df}{dx} = 2x + dx. \quad (135)$$

Protože ale $dx \rightarrow 0$, máme konečně

$$\frac{df}{dx} = 2x. \quad (136)$$

Protože výraz $\frac{df}{dx}$ je zřejmě směrnici tečny grafu funkce f v bodě x , je tudíž totožný s hledanou derivací funkce f :

$$f' = \frac{df}{dx} = 2x. \quad (137)$$

Pozorování:

Přeložíme-li výše naznačený postup do jazyka limit, přejde rovnost (131) definující směrnici sečny grafu funkce f v bodech x a x_0 , na rovnost

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (138)$$

definující směrnici tečny grafu funkce f v bodě x_0 (k němuž jsme bod x nekonečně přiblížili).

Diference funkce f v této limitě pak přechází v tzv. **diferenciál funkce** f v bodě x_0 :

$$df(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} dx = f'(x_0) dx. \quad (139)$$

Poznámka:

Derivace funkce více proměnných $f = f(x, y, z, \dots)$ značíme

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \dots \quad (140)$$

a nazýváme je **parciální derivace** funkce f podle proměnných x, y, z, \dots . Vznikají obyčejným derivováním funkce f vždy podle proměnné uvedené ve jmenovateli (na ostatní proměnné daná parciální derivace nepůsobí, takže se vzhledem k derivování chovají jako obyčejné konstanty). Alternativním označením parciálních derivací (140) je

$$f'_x, f'_y, f'_z, \dots \quad (141)$$

Derivace součinu funkcí

Mají-li funkce f a g v bodě x_0 derivaci, má v tomto bodě derivaci i funkce $h = f \cdot g$ (plyne z věty o limitě součinu) a platí:

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= g(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= g(x_0) f'(x_0) + f(x_0) g'(x_0). \end{aligned} \quad (142)$$

Derivace podílu funkcí

Mají-li funkce f a g v bodě x_0 derivaci a je-li $g(x_0) \neq 0$, má v tomto bodě derivaci i funkce $h = \frac{f}{g}$ (plyne z věty o limitě podílu) a platí:

$$\begin{aligned}
h'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \\
&= \frac{1}{g^2(x_0)} \left(g(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \\
&= \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.
\end{aligned}$$

(143)

Derivace kompozice funkcí

Mají-li funkce g derivaci v bodě x_0 a funkce f derivaci v bodě $u_0 = g(x_0)$, pak složená funkce $h = f \circ g = f(g)$ má derivaci v bodě x_0 (plyne z věty o limitě kompozice) a platí:

$$\begin{aligned}
h'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \\
&= \lim_{g(x) \rightarrow g(x_0)} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{u \rightarrow u_0} g(x) \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(u_0)g'(x_0) = \\
&= f'(g(x_0))g'(x_0).
\end{aligned}$$

(144)

Derivace inverzní funkce

Má-li funkce $g(x) = y$ derivaci v bodě x_0 , pak funkce k ní inverzní $g^{-1}(y) = x$ má derivaci v bodě y_0 a platí:

$$\begin{aligned} (g^{-1})'(y_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{g(x) \rightarrow g(x_0)} \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)} = \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{g'(x_0)} = \frac{1}{g'(g^{-1}(y_0))}. \end{aligned} \quad (145)$$

Po formální záměně závisle a nezávisle proměnné odtud dostáváme užitečný výsledek:

$$(g^{-1})'(x_0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x_0))}. \quad (146)$$

Příklady výpočtu derivací

Demonstrujme si názorně použití výše odvozených vztahů pro výpočet derivací některých základních funkcí. Započneme funkcí elementární:

$$(e^{x_0})' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{y=(x-x_0) \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = e^{x_0}. \quad (147)$$

V předchozích odstavcích jsme si ukázali některé unikátní vlastnosti elementární funkce. Zde jsme byli právě svědky další z nich – elementární funkce je sama sobě derivací. Jinými slovy, působením derivace na elementární funkci se tato nijak nezmění.

Zkusme si zderivovat další funkci:

$$(\ln x_0)' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln \frac{x}{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln \frac{x}{x_0}}{\frac{x}{x_0} - 1} = \frac{1}{x_0} \lim_{y = \frac{x}{x_0} \rightarrow 1} \frac{\ln y}{y - 1} = \frac{1}{x_0}.$$

(148)

Uvědomíme-li si, že funkce $\ln x$ je zároveň inverzní, k funkci e^x , můžeme dospět k témuž výsledku kratší cestou za pomoci věty o derivaci inverzní funkce

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x},$$

(149)

kde nyní již stačí jen dosadit za x konkrétní bod x_0 a máme shodný výsledek.

Vyzbrojeni arzenálem předchozích znalostí nyní již můžeme derivovat další a další funkce zcela mechanicky, v několika málo krocích:

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{x \ln a},$$

(150)

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = (e^u)' (a \ln x)' = e^u \frac{a}{x} = e^{a \ln x} \frac{a}{x} = \frac{ax^a}{x} = ax^{a-1}$$

(151)

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = (e^u)' (x \ln a)' = e^u \ln a = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$$

(152)

$$(\sin x)' = \left[\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right]' = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})' = \cos x$$

(153)

$$(\cos x)' = \left[\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right]' = -\frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})' = -\sin x$$

(154)

$$\begin{aligned}
 (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x (\sin x)' - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \\
 &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x
 \end{aligned}
 \tag{155}$$

$$\begin{aligned}
 (\cot x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{\sin x (\cos x)' - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \\
 &= -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x
 \end{aligned}
 \tag{156}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}
 \tag{157}$$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}
 \tag{158}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}
 \tag{159}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{(\cot y)'} = -\frac{1}{1 + \cot^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}
 \tag{160}$$

Kde poslední 4 funkce jsme derivovali pomocí věty o derivaci inverzní funkce.

Pozorování:

Z definice derivace funkce coby směrnice tečny grafu této funkce v daném bodě plyne následující pozorování:

Nechť má funkce f v každém bodě intervalu $\langle a, b \rangle$ derivaci (říkáme, že je na tomto intervalu **spojitě diferencovatelná**). Jestliže

$$\forall x \in (a, b): f'(x) > 0, \text{ resp. } f'(x) < 0, \quad (161)$$

je funkce f na celém tomto intervalu rostoucí resp. klesající.

Příklad 2:

Určeme, v kterých intervalech roste a v kterých klesá funkce

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2. \quad (162)$$

Řešení:

$$f'(x) = 12(x^3 - x^2 - 6x) = 12x(x-3)(x+2). \quad (163)$$

Nulovými body funkce f' jsou tedy

$$\begin{aligned} L_1 &= -2, \\ L_2 &= 0, \\ L_3 &= 3. \end{aligned} \quad (164)$$

Tyto body dělí funkci f na 4 intervaly, ve kterých má vždy monotónní průběh:

Tabulka 1

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
$x + 2$	-	+	+	+
x	-	-	+	+
$x - 3$	-	-	-	+
$f'(x)$	-	+	-	+

Z uvedené tabulky je zřejmé, že

$$\begin{aligned} \forall x \in (-2, 0) \cup (3, \infty): f'(x) > 0, \\ \forall x \in (-\infty, -2) \cup (0, 3): f'(x) < 0. \end{aligned} \quad (165)$$

Proto f roste na intervalech $(-2,0)$ a $(3,\infty)$ a klesá na intervalech $(-\infty,2)$ a $(0,3)$.

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

První Bolzanova věta



Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781 – 1848)

Nechť funkce f je spojitá v bodě c a necht' $f(c) > 0$ resp. $f(c) < 0$.
Potom existuje takové okolí $U_\delta(c)$. Že

$$\forall x \in D(f) : x \in U_\delta(c) \Rightarrow f(x) > 0 \vee f(x) < 0. \quad (166)$$

Důkaz:

Položme

$$U_\delta(x_0) = (f(x_0) - r, f(x_0) + r), \quad f(x_0) > 0, \quad r = \frac{f(x_0)}{2}. \quad (167)$$

Protože

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (168)$$

existuje k okolí $U_\varepsilon(x_0)$ takové okolí $U_\delta(x_0)$, že

$$\forall x \in U_\delta(x_0): f(x) \in U_\varepsilon(x_0) = (f(x_0) - r, f(x_0) + r), \quad (169)$$

neboli

$$\forall x \in U_\delta(x_0): f(x) > f(x_0) - r = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0. \quad (170)$$

V případě, že $f(x_0) < 0$ se důkaz provede zcela analogicky.

Druhá Bolzanova věta

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí

$$f(a) > 0 > f(b), \text{ resp. } f(a) < 0 < f(b), \quad (171)$$

potom

$$\exists x_0 \in (a, b): f(x_0) = 0. \quad (172)$$

Důkaz:

Vyšetříme třeba případ $f(a) > 0 > f(b)$. Označme

$$M = \{x \in \langle a, b \rangle: f(x) > 0\}; \quad x_0 = \sup M. \quad (173)$$

Dle první Bolzanovy věty je funkce f kladná na jistém pravém okolí bodu a a záporná na jistém levém okolí bodu b . Odtud a z definice suprema vyplývá, že $x_0 \in (a, b)$.

Dále musí být $f(x_0) = 0$, neboť skutečnost $f(x_0) \neq 0$ by dle první Bolzanovy věty vedla ke sporu s předpokladem, že $x_0 = \sup M$.

V případě $f(a) < 0 < f(b)$ bychom v důkazu postupovali obdobně.

Weierstrassova věta



Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815 – 1887)

Jestliže je funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, potom existují čísla

$$\min f(\langle a, b \rangle), \quad \max f(\langle a, b \rangle). \quad (174)$$

Důkaz:

Dokažme např. existenci $\max f(\langle a, b \rangle)$.

Zvolme tedy posloupnost $(y_n) \in f(\langle a, b \rangle)$, pro kterou platí:

$$y_n \rightarrow \sup f(\langle a, b \rangle). \quad (175)$$

Zvolme dále posloupnost $(x_n) \in \langle a, b \rangle$ takovou, že

$$\forall n \in \mathbb{N}: f(x_n) = y_n. \quad (176)$$

Z posloupnosti (x_n) vybereme konvergentní podposloupnost (x_k) takovou, že

$$x_{k_n} \rightarrow c \in \langle a, b \rangle. \quad (177)$$

Odtud a ze spojitosti funkce f v bodě c plyne, že

$$f(x_{k_n}) = y_{k_n} \rightarrow f(c). \quad (178)$$

Porovnáním (178) a (175) obdržíme rovnost

$$f(c) = \sup f(\langle a, b \rangle). \quad (179)$$

Jelikož však také

$$f(c) \in f(\langle a, b \rangle), \quad (180)$$

platí dokonce

$$f(c) = \max f(\langle a, b \rangle). \quad (181)$$

Existence $\min f(\langle a, b \rangle)$ se dokazuje obdobně.

Rolleova věta



Michel Rolle (1652 – 1719)

Nechť $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce, diferencovatelná na intervalu (a, b) . Nechť dále $f(a) = f(b)$. Potom

$$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0. \quad (182)$$

Důkaz:

Funkce f je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a proto zde dle Weierstrassovy věty nabývá lokálního maxima i minima.

a) Necht'

$$\forall x \in \langle a, b \rangle: f(x) = konst \Rightarrow f'(x) = 0, \quad (183)$$

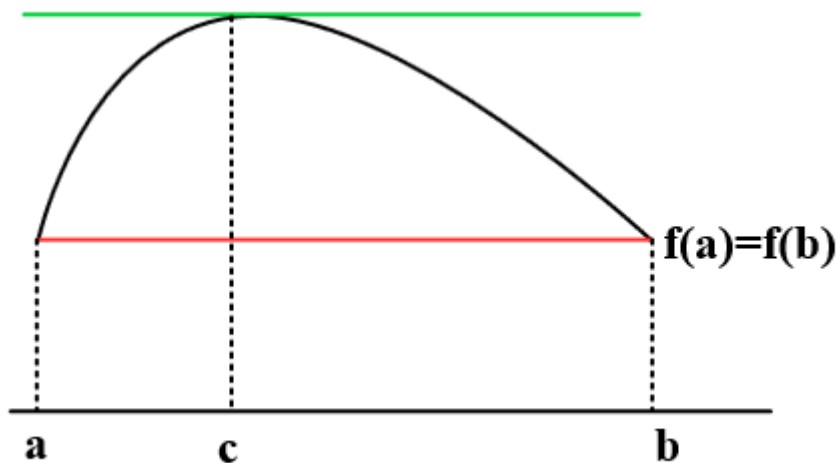
takže

$$\forall \xi \in \langle a, b \rangle: f'(\xi) = 0. \quad (184)$$

b) Necht'

$$\exists \xi \in (a, b): f(\xi) \neq f(a) = f(b). \quad (185)$$

Funkce f pak musí nabývat alespoň jeden lokální extrém v bodě $\xi \in (a, b)$ a proto opět platí $f'(\xi) = 0$.



Cauchyova věta



Baron Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857)

Nechť

$$\begin{aligned} f &: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \\ g &: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{186}$$

jsou spojité funkce, diferencovatelné na (a, b) .

Nechť dále

$$\forall x \in (a, b): g'(x) \neq 0. \tag{187}$$

Potom

$$\exists \xi \in (a, b): \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{188}$$

Důkaz:

- a) Ukážeme nejprve, že $g(a) - g(b) \neq 0$. Důkaz provedeme sporem. Kdyby $g(a) - g(b) = 0$, tak by platilo $g(a) = g(b)$ a dle Rolleovy věty by $\exists \xi \in (a, b): g'(\xi) = 0$, což je spor s předpokladem Cauchyovy věty.

b) Uvažujme nyní funkci

$$h: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} : h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x). \quad (189)$$

Je to spojitá funkce diferencovatelná na (a, b) , která má následující vlastnosti:

$$\begin{aligned} h(a) &= (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = \\ &= f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) = \\ &= f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b), \end{aligned} \quad (190)$$

$$h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x). \quad (191)$$

Podle Rolleovy věty

$$\exists \xi \in (a, b) : h'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0 \quad (192)$$

odkud již

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (193)$$

Lagrangeova věta



Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813)

Necht' $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce, diferencovatelná na intervalu (a, b) . Potom

$$\exists \xi \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \quad (194)$$

Důkaz:

Zvolme funkci

$$g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x. \quad (195)$$

Tato funkce je spojitá a diferencovatelná na (a, b) , přičemž

$$g'(x) = 1. \quad (196)$$

Funkce f, g tedy splňují na $\langle a, b \rangle$ předpoklady Cauchyovy věty.

Proto

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \quad (197)$$

Odtud

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \quad (198)$$

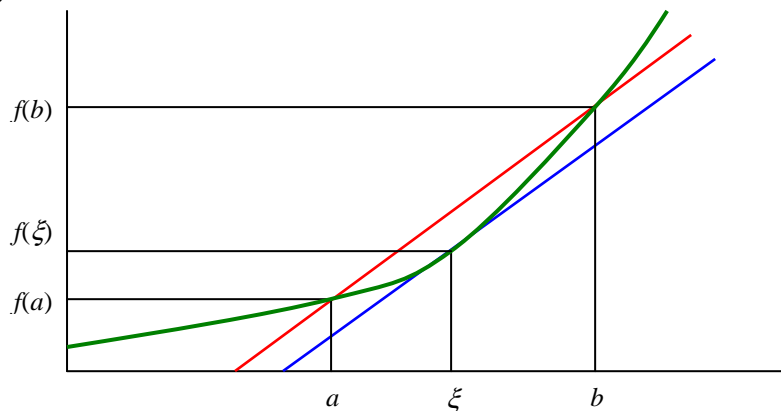
kde $\xi \in (a, b)$.

Důsledek:

Protože $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ je směrnicí sečny grafu funkce f procházející body $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$, a zároveň je směrnicí tečny tohoto grafu

v bodě $[\xi, f(\xi)]$, pak $\exists[\xi, f(\xi)], \xi \in (a, b)$ takový, že tečna grafu funkce f v tomto bodě je rovnoběžná s výše zmíněnou sečnou grafu funkce f .

Obr. 9



l'Hospitalova věta



Guillaume François Antoine, markýz de l'Hospital (1661 – 1704)

Nechť

$$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R} \quad (199)$$

jsou diferencovatelné funkce, $a < b \leq \infty$. Necht' dále

$$\forall x \in \langle a, b \rangle : g(x) \neq 0 \wedge g'(x) \neq 0. \quad (200)$$

a) Necht'

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0. \quad (201)$$

Pak platí implikace

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \quad (202)$$

b) Necht'

$$\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \infty. \quad (203)$$

Pak platí následující implikace:

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \quad (204)$$

Důkaz:

a) Zvolme libovolné $U_\varepsilon(L)$. Protože $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

$$\exists U_\delta^*(b) : \left(\forall x \in U_\delta^*(b) : \frac{f'(x)}{g'(x)} \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(L) \right). \quad (205)$$

Necht'

$$x, y \in U_\delta^*(b), x < y < b. \quad (206)$$

Pak pro interval $\langle x, y \rangle$ jsou splněny podmínky Cauchyovy věty, takže

$$\exists \xi \in (x, y) \subset U_{\delta}^*(b) : \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(L). \quad (207)$$

Dle předpokladu L'Hospitalovy věty $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$, tedy platí, že

$$\exists x \in U_{\delta}^*(b) : \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \in U_{\varepsilon}(L). \quad (208)$$

K libovolnému $U_{\varepsilon}(L)$ tedy vskutku existuje takové $U_{\delta}^*(b)$, že

$$\forall x \in U_{\delta}^*(b) : \frac{f(x)}{g(x)} \in U_{\varepsilon}(L) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \quad (209)$$

b) Analogickým postupem, jako v předchozím bodě důkazu, dojdeme k závěru, že

$$\exists \xi \in (x, y) \subset U_{\delta}^*(b) : \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(L), \quad (210)$$

kde jsme tentokrát volili $y < x$. Zvolme tedy $x \in U_{\delta}^*(b)$.

Protože $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \infty$,

$$\exists U_{\delta_2}^*(b) : \left(\forall x \in U_{\delta_2}^*(b) : g(x) > g(y) \right). \quad (211)$$

Dále

$$\exists U_{\delta_3}^*(b) : \left(\forall x \in U_{\delta_3}^*(b) : g(x) > 0 \right). \quad (212)$$

Zvolme $\delta_0 \leq \min\{\delta_2, \delta_3\}$ tak, aby $y \notin U_{\delta_0}^*(b)$. Pak zřejmě

$$U_{\delta_0}^*(b) \subset U_{\delta_1}^*(b) \quad (213)$$

a

$$\forall x \in U_{\delta_0}^*(b): g(x) > g(y) \Rightarrow g(x) - g(y) > 0 \wedge g(x) > 0. \quad (214)$$

Přepíšeme-li nyní podmínku (210) do tvaru

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < L + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (215)$$

pak po vynásobení výrazem $g(x) - g(y)$, o kterém jsme právě dokázali, že je > 0 , postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)(g(x) - g(y)) &< f(x) - f(y) < \\ &< \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)(g(x) - g(y)), \end{aligned} \quad (216)$$

$$\begin{aligned} \left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)(g(x) - g(y)) + f(y) &< f(x) < \\ &< \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)(g(x) - g(y)) + f(y), \end{aligned} \quad (217)$$

$$\begin{aligned} \frac{\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)(g(x) - g(y))}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} &< \frac{f(x)}{g(x)} < \\ &< \frac{\left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)(g(x) - g(y))}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}, \end{aligned} \quad (218)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)g(x) - \left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \\ & < \frac{\left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)g(x) - \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}, \end{aligned} \quad (219)$$

$$\begin{aligned} & \left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \\ & < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}. \end{aligned} \quad (220)$$

Při pevném y platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \right] = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \right]. \quad (221)$$

Proto

$$\begin{aligned} \exists U_{\delta}^*(b) \subset U_{\delta_0}^*(b) : & \left(\forall x \in U_{\delta}^*(b) : -\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} > -\frac{\varepsilon}{2} \wedge \right. \\ & \left. \wedge -\left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} < \frac{\varepsilon}{2} \right), \end{aligned} \quad (222)$$

a tedy

$$-\frac{\varepsilon}{2} < -\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} < -\left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (223)$$

Proto

$$\forall x \in U_{\delta}^*(b) : L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon, \quad (224)$$

tj.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in U_{\varepsilon}(L) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \quad (225)$$

Specielně je potřeba prozkoumat případ $L = \infty$, neboť v nevlastních bodech oboru svých hodnot mohou funkce jevit řadu patologických vlastností. Je zřejmé, že

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^* : \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} > \frac{2}{\varepsilon}. \quad (226)$$

Proto

$$\begin{aligned} \forall x \in U_{\delta}^*(b) : f(x) - f(y) > \frac{2}{\varepsilon}(g(x) - g(y)) &\Rightarrow \\ \Rightarrow f(x) > \frac{2}{\varepsilon}g(x) - \frac{2}{\varepsilon}g(y) + f(y). \end{aligned} \quad (227)$$

Po vydělení této nerovnosti funkcí $g(x)$ dostáváme nerovnost

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{2}{\varepsilon} - \frac{2}{\varepsilon} \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}. \quad (228)$$

Protože

$$\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \infty, \quad (229)$$

je při pevném y

$$\lim_{x \rightarrow b} \left(-\frac{2g(y)}{\varepsilon g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \right) = 0. \quad (230)$$

Proto

$$\exists U_{\delta}^*(b) \subset U_{\delta_0}^*(b) : \left(\forall x \in U_{\delta}^*(b) : -\frac{2g(y)}{\varepsilon g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} > -\frac{1}{\varepsilon} \right), \quad (231)$$

odkud

$$\forall x \in U_{\delta}^*(b) : \frac{f(y)}{g(x)} > \frac{2g(y)}{\varepsilon g(x)} - \frac{1}{\varepsilon} \wedge \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{2}{\varepsilon} - \frac{2g(y)}{\varepsilon g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \quad (232)$$

a tedy

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{2}{\varepsilon} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (233)$$

To ale znamená, že

$$\forall x \in U_{\delta}^*(b) : \frac{f(x)}{g(x)} \in U_{\varepsilon}(L). \quad (234)$$

K libovolnému $U_{\infty}(\infty)$ tedy existuje takové $U_{\delta}^*(b)$, že

$$\forall x \in U_{\delta}^*(b) : \frac{f(x)}{g(x)} \in U_{\varepsilon}(\infty) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty. \quad (235)$$

Tím je věta dokázána.

l'Hospitalova metoda výpočtu limit

l'Hospitalova věta patří k velmi mocným nástrojům pro výpočet limit typu $\frac{0}{0}$, či $\frac{\infty}{\infty}$. Demonstrujme si opět její funkci na několika jednoduchých příkladech, z nichž některé jsme již dříve řešili klasickými postupy:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + x^2 - 2x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 2}{3x^2 + 2x - 2} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x - 25}{x^3 - 3x^2 - 9x - 5} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 10}{3x^2 - 6x - 9} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{10+x} - 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{10+x}}} = \lim_{x \rightarrow -1} 2\sqrt{10+x} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{2x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \left(2 \sin \frac{1}{x} + x \cos x \sin x \right)}{2 + \cos x} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}}{1} = \\ &= 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} + \frac{\sin x}{3\sqrt[3]{\cos^2 x}}}{2\sin x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{\cos^2 x}} - \frac{1}{2\sqrt{\cos x}}}{2\cos x} = -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - 3\sqrt[3]{x} - 2 + 2\sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(1 + \sqrt{x}) - 2(1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{1 - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + 3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{x^2}}{1 - x} = \\ &= \lim_{y = \sqrt[3]{x} \rightarrow 1} \frac{(1 + 3y^3 - 2y^2 - 2y^4)'}{(1 - y^6)'} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{-8y^3 + 9y^2 - 4y}{-6y^5} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x - 2x}{2x \sin^2 x + 2x^2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x - x}{x(\sin^2 x + x \sin x \cos x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(2x) - 2}{2 \sin^2 x + 2x \sin(2x) + 2x \sin(2x) + 2x^2 \cos(2x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{\sin^2 x + 2x \sin(2x) + x^2 \cos(2x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 x}{\sin^2 x + 2x \sin(2x) + x^2 \cos(2x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \frac{\sin^2 x}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2} + 2 \frac{\sin(2x)}{x} + \cos(2x)} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Taylorova věta



Brook Taylor (1685 – 1731)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a necht' Necht' $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je n -kráte spojitě diferencovatelná a $(n - 1)$ -kráte diferencovatelná na intervalu (a, b) .

Potom

$$\begin{aligned}
\exists \xi \in (a, b): f(b) - f(a) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (b-a)^i = \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (b-a)^i + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.
\end{aligned}
\tag{236}$$

Důkaz:

Uvažujme funkci

$$\begin{aligned}
h: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, h(x) &= f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!} (b-x) - \frac{f''(x)}{2!} (b-x)^2 - \dots \\
&\dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (b-x)^n - \frac{\lambda}{(n+1)!} (b-x)^{n+1}.
\end{aligned}
\tag{237}$$

Zřejmě je $h(b) = 0$ a λ můžeme zvolit tak, aby rovněž $h(a) = 0$. Nyní spočtěme derivaci funkce h :

$$\begin{aligned}
h'(x) &= -f'(x) - \frac{f''(x)}{1!} (b-x) - \frac{f'''(x)}{2!} (b-x)^2 - \dots \\
&\dots - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!} (b-x)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n + f'(x) + \frac{f''(x)}{1!} (b-x) + \dots \\
&\dots + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!} (b-x)^{n-1} + \frac{\lambda}{n!} (b-x)^n = \left(\lambda - f^{(n+1)}(x) \right) \frac{(b-x)^n}{n!}.
\end{aligned}
\tag{238}$$

Dle Rolleovy věty tedy

$$\exists \xi \in (a, b): h'(\xi) = \left(\lambda - f^{(n+1)}(\xi) \right) \frac{(b-\xi)^n}{n!} = 0
\tag{239}$$

a odtud

$$\lambda = f^{(n+1)}(\xi), \quad (240)$$

takže

$$\begin{aligned} h(x) = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \dots \\ \dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-x)^{n+1} \end{aligned} \quad (241)$$

a zároveň

$$\begin{aligned} h(a) = f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \dots \\ \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (242)$$

Proto

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) = \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \end{aligned} \quad (243)$$

Analýza průběhu funkcí jedné reálné proměnné

Taylorova a Maclaurinova řada funkce



Colin Maclaurin (1698 – 1746)

Nechť funkce f je v bodě x_0 nekonečněkrát diferencovatelná. Potom nekonečnou řadu

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i \quad (244)$$

kde x_0 je libovolný prvek množiny bodů, v nichž je řada konvergentní, nazýváme **Taylorovou řadou funkce f** v bodě x_0 .

Specielně, volíme-li $x_0 = 0$, nazýváme odpovídající Taylorovu řadu **Maclaurinovou řadou**.

Příklady:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (245)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (246)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (247)$$

$$a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 a}{3!} + \dots + \frac{x^n \ln^n a}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!} \quad (248)$$

Jak okamžitě plyne ze vztahu (236), omezíme-li se na n členů Maclaurinovy řady, dopouštíme se na intervalu $(-a, a)$ chyby

$$\Delta f \leq \frac{\sup |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}, \quad \xi \in (-a, a). \quad (249)$$

Příklad 1:

Urči $\sin \frac{\pi}{9}$ s přesností lepší, než 10^{-9}

Řešení:

Taylorův rozvoje funkce $\sin x$ je

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (250)$$

Tzv. **Taylorův zbytek** (249) pak utvoříme z $(n+1)$ -ho prvku (250) jednoduše tak, že všechna n v (250) nahradíme čísly $(n+1)$.

Výsledný výraz poté vynásobíme suprémem absolutní hodnoty $(n+1)$ -ni derivace odpovídající funkce dle vztahu (249) a z výsledného výrazu stanovíme absolutní hodnotu:

$$\Delta f = 10^{-9} \leq \left| (-1)^{n+1} \frac{\sup |\sin^{(n+1)}(\xi)| \left(\frac{\pi}{9}\right)^{2n+3}}{(2n+3)!} \right| = \frac{1}{(2n+3)!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^{2n+3} \quad (251)$$

Odtud

$$10^9 \left(\frac{\pi}{9}\right)^{2n+3} \geq (2n+3)! \quad (252)$$

$$n = 3.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{9} &= \sum_{n=0}^3 (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\pi}{9} - \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^7}{7!} = \\ &= 0,34202014311387... \end{aligned} \quad (253)$$

Přesná hodnota je

$$0,34202014332567... \quad (254)$$

Příklad 2:

Urči s jakou přesností aproximuje Taylorův rozvoj 4. řádu funkci $\sin(x)$ na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{9} \right\rangle$.

Řešení:

$$\sup \left| (\sin \xi)^{(4+1)} \right| = \sup |\cos \xi| = 1 \quad (255)$$

$$\frac{1}{(2 \cdot 4 + 3)!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^{2 \cdot 4 + 3} = \frac{1}{11!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^{11} \approx 10^{-13} \quad (256)$$

Vskutku, přidáním jediného dalšího členu Taylorova rozvoje, máme

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{9} &= \sum_{n=0}^4 (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\pi}{9} - \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^7}{7!} + \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^9}{9!} = \\ &= 0,34202014332590\dots\end{aligned}$$

(257)

Příklad 3:

Vypočtěte součty následujících divergentních a oscilujících řad:

- a) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$
- b) $1 + 10 + 100 + 1000 + \dots$
- c) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$
- d) $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \dots$
- e) $1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + \dots$
- f) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$

Řešení:

Spočteme si Maclaurinovy řady některých racionálních lomených funkcí a pokusíme se z nich zkonstruovat výše zadané řady:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(-x)^k$$

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sin\left(-\frac{\pi k}{2}\right) x^k$$

Volbou $x = 2$ dostáváme z první rovnosti výsledek řady a)

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = -1.$$

Volbou $x = 10$ dostaneme z téže rovnosti výsledek řady b)

$$1 + 10 + 100 + 1000 + \dots = -\frac{1}{9}.$$

Z druhé rovnosti dostáváme volbou $x = 1$ výsledek c)

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2},$$

volbou $x = 2$ výsledek d)

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \dots = \frac{1}{3}.$$

volbou $x = -2$ výsledek a)

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots = -1,$$

Ze čtvrté rovnosti volbou $x = 1$ plyne součet řady e)

$$1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + \dots = \frac{1}{3}.$$

Ze třetí rovnosti volbou $x = 1$ plyne součet řady f)

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots = \frac{1}{4}$$

Poznámka

Výsledky součtu divergentních řad a) a b) můžeme ověřit i způsobem nezávislým na Maclaurinových řadách:

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

$$S - 1 = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = 2S$$

$$S = -1.$$

$$S = 1 + 10 + 100 + 1000 + \dots$$

$$S - 1 = 10 + 100 + 1000 + \dots = 10S$$

$$S = -\frac{1}{9}.$$

Ačkoliv se výše uvedené příklady konečných výsledků divergujících řad na první pohled příčí zdravému rozumu, nutno podotknout, že se jedná nejenom o matematicky zcela korektní závěry, exaktně ošetřené v tzv. teorii **Riemannovy zeta funkce**, ale v řadě případů dokonce o experimentálně ověřená fakta, která fyzikové již mnohá desetiletí s úspěchem využívají v kvantové teorii pole, při aplikaci metod zvaných **renormalizace** a **regularizace**.

Pozorování

Povšimněme si, že regularizace není obyčejným sčítáním, neboť záleží obecně na pořadí, v jakém uvnitř řady jednotlivé operace provádíme. Neplatí zde komutativní, ani asociativní zákon.

Kromě nekonečných sum se dají regularizovat i nekonečné produkty. Např. součin všech přirozených čísel dává $\sqrt{2\pi}$, součin všech prvočísel je $4\pi^2$, atp.

Tečna a asymptota

Z Taylorovy věty plyne, že je-li funkce n -kráte diferencovatelná, aproximuje Taylorova řada funkci tím lépe, čím více se počet jejích členů (včetně nultého) blíží číslu n . Omezíme-li se pouze na $n = 1$ (tedy nultý a první člen), vyjadřuje Taylorova řada funkce f přímku

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (258)$$

kteřá není ničím jiným, než analytickým vyjádřením tečny grafu funkce f v bodě x_0 , o níž byla řeč již v kapitole pojednávající o derivaci. Nyní máme konečně předpis, jak tuto tečnu vždy nalézt. Ačkoli je to nejhrubější aproximace funkce f ve vybraném bodě (samozřejmě vyjma triviálního případu nultého členu Taylorovy řady, který aproximuje graf funkce v bodě x_0 pouhým jedním bodem $f(x_0)$), vystihuje první derivace přesně směrnici závislosti $f = f(x)$ ve vybraném bodě. Jak budeme svědky v příkladech na aplikaci derivace, má tato vlastnost dalekosáhlé důsledky pro naše porozumění fyzikální realitě a velmi široké využití ve vědě a technice.

Definice:

Asymptotami se směrnici grafu funkce f budeme rozumět tečny grafu funkce f , konstruované v nevlastních bodech ($x_0 = \pm\infty$) funkce f . Jako všechny tečny mají i asymptoty směrnicové vyjádření (258) které si nyní převedeme do tvaru

$$f(x) = f'(x_0)x + (f(x_0) - f'(x_0)x_0) = ax + b. \quad (259)$$

Pro směrnice asymptot zjevně musí platit rovnost

$$a = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (260)$$

Absolutní člen pak můžeme vyjádřit z rovnice tečny (259):

$$b = (f(x_0) - f'(x_0)x_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - f'(x)x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax). \quad (261)$$

Definice:

Jestliže je funkce definována na nějakém intervalu $(a,b) \cup (b,c)$, zatímco bod b je singulárním bodem f , pak přímka $x = b$ se nazývá **asymptotou bez směrnice** grafu funkce f právě tehdy, má-li funkce f v bodě b alespoň jednu jednostrannou nevlastní limitu.

Oskulační kružnice a křivost funkce v bodě

Každý další člen Taylorova rozvoje závisí vždy na vyšší derivaci funkce f , která přidává další informaci o průběhu vyšetřované funkce. Kromě prvních derivací, aproximujících funkci f přímkou a charakterizujících okamžitou rychlost změny závisle proměnné se změnou nezávisle proměnné, jsou fyzikálně velmi zajímavé i derivace druhé, charakterizující zrychlování či zpomalování těchto změn. Je to zcela nová informace o průběhu funkce, která fyzikálně velmi často odpovídá veličině zvané **intenzita silového pole**. Ta je definována druhým Newtonovým zákonem jako

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad (262)$$

a je tedy přímo úměrná veličině \mathbf{F} zvané **síla**. Rovnoměrný pohyb tělesa hmoty m po kružnici poloměru r konstantní úhlovou rychlostí ω , popíšeme vektorově parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} s_1 &= r \sin(\omega t), \\ s_2 &= r \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (263)$$

Odtud derivováním získáme rychlost:

$$\begin{aligned}v_1 &= r\omega \cos(\omega t), \\v_2 &= -r\omega \sin(\omega t),\end{aligned}\tag{264}$$

Vektorový součet obou na sebe kolmých složek rychlosti dává

$$v = r\omega \sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = r\omega.\tag{265}$$

Druhým derivováním získáme zrychlení:

$$\begin{aligned}a_1 &= -r\omega^2 \sin(\omega t), \\a_2 &= -r\omega^2 \cos(\omega t).\end{aligned}\tag{266}$$

Vektorový součet obou na sebe kolmých složek zrychlení dává

$$a = r\omega^2 \sqrt{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)} = r\omega^2.\tag{267}$$

Protože výsledná rychlost, jak vidno, není funkcí času, znamená to, že se s časem nemění. Jelikož ale výsledné zrychlení vyšlo přesto nenulové, nemůže vektor zrychlení obsahovat žádnou složku rovnoběžnou se směrem vektoru rychlosti (jinak by tato složka pochopitelně přispívala k časové změně rychlosti a rychlost by musela být nutně funkcí času, což ale není). I bez použití analytické geometrie tak docházíme k přirozenému závěru, že vektor celkového zrychlení je v tomto případě pohybu kolmý na vektor rychlosti a tedy na okamžitý směr pohybu hmotného bodu. Z druhého Newtonova zákona (262) pak můžeme ihned vyjádřit velikost odstředivé síly působící na těleso, jež je tímto vektorem generována:

$$F_o = mr\omega^2.\tag{268}$$

Ačkoliv je rovnoměrný pohyb po kružnici jen jedním vysoce speciálním případem z množiny všech možných pohybů hmotného bodu v rovině, dá se ukázat, že jakýkoliv myslitelný pohyb lze ve skutečnosti, za pomoci druhé derivace, vyjádřit jako součet nekonečně mnoha dílčích pohybů po infinitesimálních úsecích kružnic různého

poloměru. Na tento poloměr je přitom kladena jediná podmínka – aby aproximoval poloměr zakřivení grafu analyzované funkce na nějakém okolí vybraného bodu x_0 , s přesností do 2. řádu Taylorova rozvoje, abychom dokázali spočítat příslušná zrychlení. To zní jako velmi dobrá motivace pro pokus o konstrukci těchto, tzv. **oskulačních kružnic**:

Mějme tedy dánu funkci $g(x) \equiv y$ a bod x_0 , v němž má funkce g alespoň 2 derivace, přičemž $g''(x) \neq 0$.

Kružnice se středem v bodě $[a, b]$ a poloměrem r má rovnici

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \quad (269)$$

Kružnice jako celek tvoří zobrazení v rovině, které zjevně nespĺňuje kritéria pro to býti funkcí. Její horní, resp. dolní půlkružnice však již ano.

Uvažujme např. horní půlkružnici

$$f(x) = \sqrt{r^2 - (x-a)^2} + b. \quad (270)$$

Je-li část této půlkružnice grafem funkce g , pak platí

$$(x-a)^2 + (f(x)-b)^2 = r^2. \quad (271)$$

Po zderivování obou stran této rovnice a vydělení dvěma, dostaneme

$$(x-a) + (f(x)-b)f'(x) = 0, \quad (272)$$

a po druhém derivování, máme

$$1 + (f'(x))^2 + (f(x)-b)f''(x) = 0. \quad (273)$$

Má-li být $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$ pro $n = 0, 1, 2$, musí koeficienty a, b, r splňovat soustavu rovnic

$$\begin{aligned}(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 &= r^2 \\ (x_0 - a) + (y_0 - b)y_0' &= 0 \\ 1 + (y_0')^2 + (y_0 - b)y_0'' &= 0\end{aligned}\tag{274}$$

Z druhé rovnice získáme

$$x_0 - a = -y_0'(y_0 - b)\tag{275}$$

a po dosazení do první rovnice, máme

$$\begin{aligned}[y_0'(y_0 - b)]^2 + (y_0 - b)^2 &= (y_0')^2(y_0 - b)^2 + (y_0 - b)^2 = \\ &= (y_0 - b)^2[1 + (y_0')^2] = r^2\end{aligned}\tag{276}$$

odkud

$$r = |y_0 - b|\sqrt{1 + (y_0')^2}.\tag{277}$$

Ze třetí rovnice dostaneme

$$y_0 - b = -\frac{1 + (y_0')^2}{y_0''}.\tag{278}$$

Po dosazení poslední rovnice do (277) a (275) získáváme hledané parametry oskulační kružnice:

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\left[1 + (y_0')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|y_0''|}, \\
 a &= x_0 - \frac{y_0' \left[1 + (y_0')^2\right]}{y_0''}, \\
 b &= y_0 + \frac{1 + (y_0')^2}{y_0''}.
 \end{aligned}
 \tag{279}$$

Čím je menší poloměr oskulační kružnice, tím je graf funkce g v daném bodě zakřivenější. Zavádí se proto pojem **křivost funkce** g v bodě x_0 , jakožto převrácená hodnota poloměru r oskulační kružnice v tomto bodě:

$$k = \frac{|y_0''|}{\left[1 + (y_0')^2\right]^{\frac{3}{2}}}.
 \tag{280}$$

Vrátíme-li se na závěr tohoto odstavce k naší fyzikální motivaci pojmu oskulační kružnice, pak hledané vyjádření normálové složky zrychlení hmotného bodu, pohybujícího se po dráze $g(x)$ rychlostí v , bude dáno vztahem

$$a_{\perp} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} = v^2 k = \frac{v^2 |g''(x_0)|}{\left[1 + (g'(x_0))^2\right]^{\frac{3}{2}}},
 \tag{281}$$

a jemu odpovídající odstředivá síla tedy bude

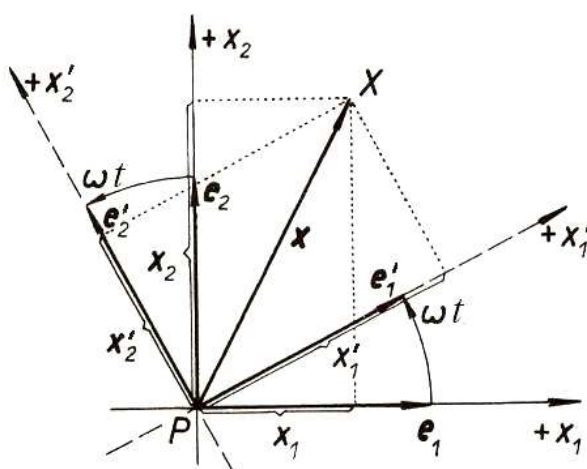
$$F_o = \frac{mv^2 |g''(x_0)|}{\left[1 + (g'(x_0))^2\right]^{\frac{3}{2}}}.
 \tag{282}$$

Rotující vztažná soustava

V minulém odstavci jsme si podrobněji rozebrali rovnoměrný pohyb po kružnici a jeho vztah k obecnějším křivočarým pohybům na pozadí inerciální vztažné soustavy. Nyní si povíme, jak se celá situace změní v případě, že celá vztažná soustava rotuje.

Mějme dánu ortonormální bázi $\beta = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ prostoru E_2 , kterou otočíme o orientovaný úhel velikosti ωt do báze $\beta' = \langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle$.

Obr. 10



Máme za úkol najít rovnice které pro $\mathbf{x} \in E_2$ popisují vztah mezi původními souřadnicemi $\langle \mathbf{x} \rangle_{\beta} = (x_1, x_2)$ a novými souřadnicemi $\langle \mathbf{x} \rangle_{\beta'} = (x'_1, x'_2)$.

Vektor \mathbf{e}'_1 resp. \mathbf{e}'_2 má v původní bázi směrnik ωt resp. $\omega t + \pi/2$. Protože platí

$$\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\omega t); \quad (283)$$

$$\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\omega t),$$

můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 \cdot \cos(\omega t) + \mathbf{e}_2 \cdot \sin(\omega t) \\ \mathbf{e}'_2 &= -\mathbf{e}_1 \cdot \sin(\omega t) + \mathbf{e}_2 \cdot \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (284)$$

Operátor zobrazení z báze β' do báze β tedy tvoří matice

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (285)$$

Tento operátor, jak snadno zjistíme, je ortonormální, takže platí

$$\hat{\mathbf{R}}^{-1} = \hat{\mathbf{R}}^T, \quad (286)$$

čili operátor přechodu od báze β' k bázi β tvoří matice

$$\hat{\mathbf{R}}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (287)$$

Hledaná maticová rovnice

$$\langle \mathbf{x} \rangle_{\beta'}^T = \hat{\mathbf{R}}^{-1} \cdot \langle \mathbf{x} \rangle_{\beta}^T \quad (288)$$

po rozepsání do souřadnic pak dá soustavu rovnic popisujících vzájemný vztah mezi oběma uvažovanými bázemi:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cdot \cos(\omega t) + x_2 \cdot \sin(\omega t) \\ x'_2 &= -x_1 \cdot \sin(\omega t) + x_2 \cdot \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (289)$$

Odtud po zderivování obou rovnic dostáváme

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{dx_1}{dt} \cos(\omega t) - x_1 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) + \frac{dx_2}{dt} \sin(\omega t) + x_2 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \\ v'_2 &= -\frac{dx_1}{dt} \sin(\omega t) - x_1 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) + \frac{dx_2}{dt} \cos(\omega t) - x_2 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t), \end{aligned}$$

(290)

neboli

$$\begin{aligned}v_1' &= v_1 \cdot \cos(\omega t) + v_2 \cdot \sin(\omega t) + \omega[-x_1 \cdot \sin(\omega t) + x_2 \cdot \cos(\omega t)] \\v_2' &= v_2 \cdot \cos(\omega t) - v_1 \cdot \sin(\omega t) - \omega[x_1 \cdot \cos(\omega t) + x_2 \cdot \sin(\omega t)]\end{aligned}\quad (291)$$

a vzhledem k (289) vyjádříme rychlost ještě jednodušeji

$$\begin{aligned}v_1' &= v_1 \cdot \cos(\omega t) + v_2 \cdot \sin(\omega t) + \omega \cdot x_2' \\v_2' &= v_2 \cdot \cos(\omega t) - v_1 \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot x_1'\end{aligned}\quad (292)$$

Tuto soustavu opět zderivujeme a máme

$$\begin{aligned}a_1' &= \frac{dv_1}{dt} \cos(\omega t) - v_1 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) + \frac{dv_2}{dt} \sin(\omega t) + v_2 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) + \omega \frac{dx_2'}{dt} \\a_2' &= -\frac{dv_1}{dt} \sin(\omega t) - v_1 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) + \frac{dv_2}{dt} \cos(\omega t) - v_2 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) - \omega \frac{dx_1'}{dt},\end{aligned}\quad (293)$$

čili

$$\begin{aligned}a_1' &= a_1 \cdot \cos(\omega t) + a_2 \cdot \sin(\omega t) + \omega \cdot v_2' + \omega[-v_1 \cdot \sin(\omega t) + v_2 \cdot \cos(\omega t)] \\a_2' &= -a_1 \cdot \sin(\omega t) + a_2 \cdot \cos(\omega t) - \omega \cdot v_1' - \omega[v_1 \cdot \cos(\omega t) + v_2 \cdot \sin(\omega t)].\end{aligned}\quad (294)$$

Porovnáním s rovnicemi (292) odtud plyne

$$\begin{aligned}a_1' &= a_1 \cdot \cos(\omega t) + a_2 \cdot \sin(\omega t) + \omega \cdot v_2' + \omega(v_2' + \omega \cdot x_1') \\a_2' &= -a_1 \cdot \sin(\omega t) + a_2 \cdot \cos(\omega t) - \omega \cdot v_1' - \omega(v_1' - \omega \cdot x_2'),\end{aligned}\quad (295)$$

tj.

$$\begin{aligned}a_1' &= a_1 \cdot \cos(\omega t) + a_2 \cdot \sin(\omega t) + 2\omega \cdot v_2' + \omega^2 \cdot x_1' \\a_2' &= -a_1 \cdot \sin(\omega t) + a_2 \cdot \cos(\omega t) - 2\omega \cdot v_1' - \omega^2 \cdot x_2'.\end{aligned}\quad (296)$$

Konstanta ω zde má zřejmě význam úhlové rychlosti, takže

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \quad (297)$$

kde vektor \mathbf{r} je normálovým vektorem pohybu. Pak po dosazení do (296) máme

$$\begin{aligned} F'_1 &= 2m \cdot \omega \cdot v'_2 + m \cdot \omega^2 \cdot x'_1 \\ F'_2 &= -2m \cdot \omega \cdot v'_1 + m \cdot \omega^2 \cdot x'_2, \end{aligned} \quad (298)$$

kde m je hmotnost testovací částice. Rovnice (298) můžeme tedy krátce zapsat jako

$$\begin{aligned} F'_1 &= F_1^c + F_1^o, \\ F'_2 &= F_2^c + F_2^o, \end{aligned} \quad (299)$$

kde F^c je tzv. **Coriolisova síla**, F^o je síla odstředivá, kterou jsme si odvodili v nezměněné podobě již v minulém odstavci.

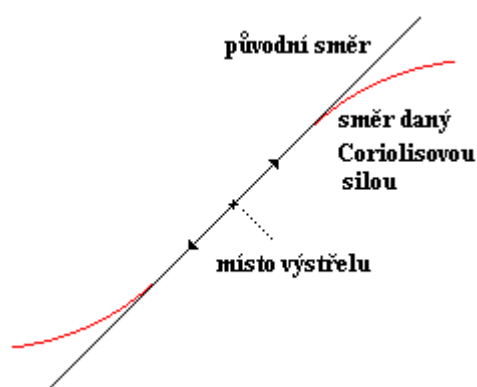


Gaspard-Gustave de Coriolis (1792 – 1843)

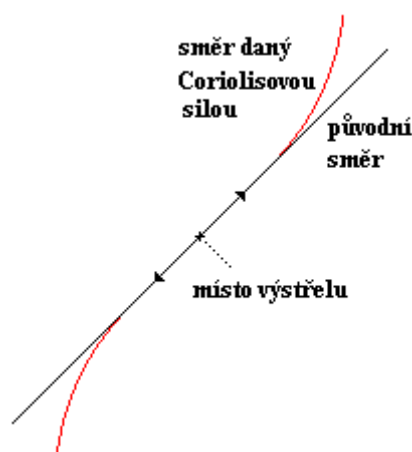
V důsledku rotace Zeměkoule a z ní plynoucí existence Coriolisovy síly dochází k řadě jevů:

1. Coriolisova síla se uplatní při střelbě na velké vzdálenosti, kdy kulka vypálená z hlavně pušky bude odkláněna od svého původního směru. Střelec s touto silou tedy musí počítat. Situaci na severní polokouli znázorňuje obr. 11a, situaci na jižní polokouli pak obr. 11b.

Obr. 11a



Obr. 11b



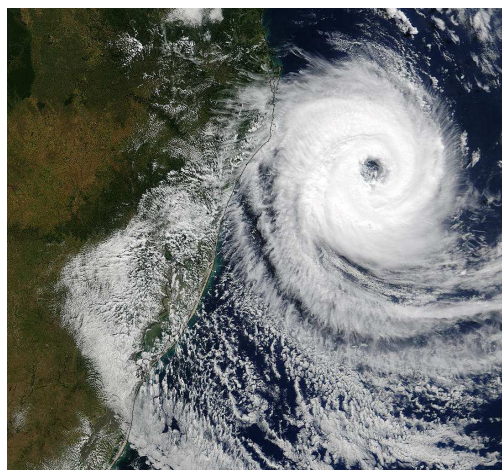
2. Na severní (resp. na jižní) polokouli dochází v důsledku existence Coriolisovy síly k většímu opotřebovávání pravých (resp. levých) kolejnic jednosměrných tratí vedoucích přibližně ve směru poledníků, neboť vlak pohybující se danou rychlostí je na tuto stranu přitahován.
3. Na severní (resp. na jižní) polokouli dochází v důsledku Coriolisovy síly k většímu podemílání pravých (resp. levých) břehů řek tekoucích přibližně ve směru poledníků. Voda proudící určitou rychlostí je opět k tomuto břehu přitahována.
4. Mezi nejdůležitější projevy Coriolisovy síly patří dynamika oceánu a atmosféry. Pokud v atmosféře vznikne tlaková níže, vzduch proudí směrem k ní, ale Coriolisova síla jej odchyluje

ve směru kolmém na rychlost. Systém se dostane do rovnováhy ve vířivém pohybu. Protiváhu ke Coriolisově síle, jež působí směrem od tlakové níže, tvoří síla způsobená rozdílem tlaku.

Místo aby vzduch proudil přímo do tlakové níže, ve velkém měřítku má atmosféra a oceán sklon pohybovat se kolmo ke směru poklesu tlaku. Jev je známý jako geostrofický vítr. Na planetě, která se neotáčí, by tekutiny proudily po nejkratší možné dráze tak, aby vyrovnaly rozdíly v tlaku. Za povšimnutí stojí, že geostrofická rovnováha se velmi liší od „setrvačných pohybů“, což vysvětluje proč jsou cyklóny ve středních zeměpisných šířkách o řád větší, než by způsobilo samotné setrvačné proudění.

Na severní polokouli směřuje pohyb okolo tlakové níže proti směru hodinových ručiček. Na jižní polokouli směřuje po směru hodinových ručiček; dynamika otáčení je zde zrcadlovým odrazem severu. Cyklóny se nevytváří na rovníku, protože v tamnějších oblastech je Coriolisův efekt příliš malý.

Coriolisův efekt ve velkém měřítku rovněž značně ovlivňuje oceánské a atmosférické proudy, což vede ke vzniku jevů, jako je například tryskové proudění (jet stream). Takové jevy jsou v geostrofické rovnováze, což znamená, že Coriolisova síla a síla působící díky gradientu tlaku jsou v rovnováze. Coriolisův efekt také zodpovídá za šíření mnoha druhů vln v oceánu i atmosféře.



Obr. 12: Zrcadlově převrácený směr otáčení cyklón na severní a jižní polokouli. Vlevo hurikán u pobřeží Floridy, vpravo hurikán u pobřeží Brazílie.

Věta o konvexnosti a konkávnosti funkce v bodě

Nechť f je spojitá, alespoň dvakrát diferencovatelná funkce.
Existuje-li bod x_0 tak, že

$$\forall x \in U_\delta(x_0): f''(x) > 0, \quad (300)$$

potom je funkce f na tomto okolí ryze konvexní.
Existuje-li bod x_0 tak, že naopak

$$\forall x \in U_\delta(x_0): f''(x) < 0, \quad (301)$$

potom je funkce f na tomto okolí ryze konkávní.

Důkaz:

\Rightarrow Nechť je např. $\forall x \in U_\delta(x_0): f''(x) > 0$. Potom

$$\forall x \in U_\delta^-(x_0): f'(x) < f'(x_0) \wedge \forall x \in U_\delta^+(x_0): f'(x_0) < f'(x). \quad (302)$$

Na nějakém redukovaném okolí bodu x_0 tedy funkce f' roste.
To ale znamená, že

$$\forall x \in U_\delta^+(x_0); x_0 < x_1: \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad (303)$$

tj. na nějakém pravém redukovaném okolí bodu x_0 je funkce f ryze konvexní.

Obdobně bychom dokázali, že rovněž na nějakém levém redukovaném okolí bodu x_0 je f ryze konvexní.

\Leftarrow Nechť $\forall x \in U_\delta(x_0)$ je f konvexní. Potom

$$\forall x_i \in U_{\delta}^*(x_0); i = 1, 2; x_1 < x_2 : \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad (304)$$

a tedy

$$\forall x \in U_{\delta}^*(x_0) : \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \quad (305)$$

neboli

$$\forall x \in U_{\delta}^*(x_0) : f'(x_0) < f'(x_1). \quad (306)$$

Funkce f' tedy na nějakém pravém redukovaném okolí bodu x_0 všude roste.

Podobně se dokáže, že rovněž i na nějakém levém redukovaném okolí bodu x_0 funkce f' roste. To ale znamená, že vskutku

$$\forall x \in U_{\delta}(x_0) : f''(x) > 0. \quad (307)$$

Pro případ konkávního průběhu funkce f se provede důkaz naprosto analogicky.

Věta o extrémech funkce

Nechť funkce f je k -krát spojitě diferencovatelná, $k \geq 2$. Nechť dále

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0. \quad (308)$$

Jeli k sudé, potom má funkce f v bodě x_0 lokální extrém. Je-li navíc

$$f^{(k)}(x_0) < 0, \quad (309)$$

jedná se o lokální minimum, je-li naopak

$$f^{(k)}(x_0) > 0, \quad (310)$$

jedná se o lokální maximum funkce f v bodě x_0 .
Pokud je ale k liché číslo, nemá funkce f v bodě x_0 žádný lokální extrém.

Důkaz:

Z Taylorovy věty plyne, že

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - x_0)^k, \quad (311)$$

kde $\xi \in U_\delta(x_0)$.

Nechť tedy např. $f^{(k)}(x_0) > 0$. Vzhledem ke spojitosti $f^{(k)}$ v bodě x_0

$$\exists U_\delta(x_0) : (\forall x \in U_\delta(x_0) : f^{(k)}(x) > 0), \quad (312)$$

viz první Bolzanovu větu. Protože $\xi \in U_\delta(x_0)$, platí rovněž

$$f^{(k)}(\xi) > 0. \quad (313)$$

Je-li k sudé číslo, dostáváme:

$$\begin{aligned} \forall x \in U_\delta^*(x_0) : f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - x_0)^k > 0 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall x \in U_\delta^*(x_0) : f(x) > f(x_0). \end{aligned} \quad (314)$$

To ale znamená, že funkce f má v bodě x_0 lokální minimum.
Je-li ale k liché číslo, bude

$$\begin{aligned} \forall x \in U_{\delta}^*(x_0): f(x) - f(x_0) &= \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - x_0)^k < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall x \in U_{\delta}^*(x_0): f(x) < f(x_0), \\ \forall x \in U_{\delta}^*(x_0): f(x) - f(x_0) &= \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - x_0)^k > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall x \in U_{\delta}^*(x_0): f(x) > f(x_0). \end{aligned} \quad (315)$$

Pro lichá k tedy funkce f na nějakém levém redukovaném okolí bodu x_0 roste a taktéž činí i na nějakém pravém okolí bodu x_0 .

To však znamená, že v tomto bodě nemůže mít funkce f žádný lokální extrém.

V případě, že $f^{(k)}(x_0) < 0$ bychom zcela obdobným způsobem ověřili, že pro sudá k má funkce f v bodě x_0 lokální maximum, kdežto pro lichá k nemá funkce f v x_0 žádný lokální extrém.

Věta o inflexních bodech funkce

Nechť je funkce f k -krát spojitě diferencovatelná, $k \geq 3$. Nechť dále

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0. \quad (316)$$

Jeli k liché, potom má funkce f v bodě x_0 inflexní bod.

Pokud je ale k sudé číslo, nemá funkce f v bodě x_0 inflexní bod.

Důkaz:

Definujme funkci

$$g = f'', \quad (317)$$

která je dle předpokladu věty $(k - 2)$ -krát spojitě diferencovatelná, tedy

$$f''(x_0) = g(x_0) = g'(x_0) \cdots = g^{(k-3)}(x_0) = 0, \quad g^{(k-2)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \neq 0. \quad (318)$$

Potom

$$\begin{aligned} \forall x, \xi \in U_\delta(x_0): f''(x) = g(x) = g(x) - g(x_0) &= \frac{g^{(k-2)}(\xi)}{(k-2)!} (x-x_0)^{k-2} = \\ &= \frac{g^{(k)}(\xi)}{(k-2)!} (x-x_0)^{k-2}. \end{aligned} \quad (319)$$

Nechť tedy např. $f^{(k)}(x_0) > 0$. Vzhledem ke spojitosti $f^{(k)}$ v bodě x_0

$$\exists U_\delta^*(x_0) : (\forall x \in U_\delta^*(x_0) : f^{(k)}(x) > 0), \quad (320)$$

viz první Bolzanovu větu. Protože $\xi \in U_\delta(x_0)$, platí rovněž

$$f^{(k)}(\xi) > 0. \quad (321)$$

Je-li k sudé číslo, pak

$$\forall x \in U_\delta^*(x_0) : f''(x) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{(k-2)!} (x-x_0)^{k-2} > 0. \quad (322)$$

Funkce f je tedy všude na $U_\delta(x_0)$ ryze konvexní a proto zde nemůže mít inflexní bod.

Zároveň to ale dle předešlé věty znamená, že funkce f má v bodě x_0 lokální minimum.

Je-li ale k liché číslo, bude

$$\forall x \in U_{\delta}^*(x_0): f''(x) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{(k-2)!} (x-x_0)^{k-2} < 0, \quad (323)$$

$$\forall x \in U_{\delta}^*(x_0): f''(x) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{(k-2)!} (x-x_0)^{k-2} > 0.$$

Pro lichá k je tedy funkce f na nějakém levém redukovaném okolí bodu x_0 ryze konkávní, zatímco na nějakém pravém okolí bodu x_0 je ryze konvexní.

To však znamená, že v tomto bodě má funkce f inflexní bod.

V případě, že $f^{(k)}(x_0) < 0$ bychom zcela obdobným způsobem ověřili, že pro sudá k nemá funkce f v bodě x_0 inflexní bod, kdežto pro lichá k tam inflexní bod má.

Analytické vyšetřování průběhu funkcí jedné reálné proměnné

Příklad 1:

Vyšetřeme průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (324)$$

Řešení:

V první řadě najdeme její singulární body:

$$S(f) = \pm 2 \quad (325)$$

V dalším kroku stanovíme paritu funkce

$$\forall n \in \mathbb{N}: f(-x) = \frac{-x^3}{x^2 - 4} = -f(x) = (-1)^{2n-1} f(x) \quad (326)$$

Vyšetřovaná funkce má tedy lichou paritu. Nyní spočteme první a druhou derivaci f :

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad (327)$$

$$f''(x) = \frac{8x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}. \quad (328)$$

Jádro první derivace je určeno rovnicí

$$x^2(x^2 - 12) = 0 \quad (329)$$

a je tedy tvořeno body

$$\ker f'(x) = \{\pm 2\sqrt{3}, 0\}. \quad (330)$$

Jádro druhé derivace určuje rovnice

$$8x(x^2 + 12) = 0 \quad (331)$$

a tvoří jej tedy jediný prvek

$$\ker f''(x) = 0. \quad (332)$$

Odtud je ihned vidět, že vyšetřovaná funkce f má 2 extrémů v bodech

$$x_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}. \quad (333)$$

V bodě $x_1 = -2\sqrt{3}$ má f své lokální maximum, v bodě $x_2 = +2\sqrt{3}$ má lokální minimum:

$$\begin{aligned}\min(f) &= [2\sqrt{3}, \sqrt{27}] \\ \max(f) &= [-2\sqrt{3}, -\sqrt{27}]\end{aligned}\quad (334)$$

Bod $x_3 = 0$ je horkým kandidátem na inflexní bod. Abychom tuto hypotézu ověřili, musíme stanovit ještě třetí derivaci funkce f :

$$f'''(x) = \frac{-24(x^4 + 24x^2 + 16)}{(x^2 - 4)^2}. \quad (335)$$

Snadno se lze přesvědčit, že

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'''(x) = \frac{-24(x^4 + 24x^2 + 16)}{(x^2 - 4)^2} \neq 0, \quad (336)$$

neboli

$$\ker f'''(x) \in \emptyset. \quad (337)$$

V bodě $x_3 = 0$ je tedy vskutku jediný inflexní bod funkce f :

$$I(f) = (0, 0). \quad (338)$$

Zbývá stanovit asymptoty funkce f . Začneme výpočtem asymptot se směrnicí:

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{2x} = 1 \quad (339)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{2x} = 0 \quad (340)$$

Funkce f má tedy jedinou asymptotu se směrnicí a tou je diagonála

$$y = ax + b = x. \quad (341)$$

Nyní určíme asymptoty bez směrnice. Jedinými kandidáty na možnou polohu tohoto druhu asymptot jsou singulární body. Spočteme v nich proto jednostranné limity:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2}^- &= \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 2}^+ &= \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -2}^- &= \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -2}^+ &= \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty. \end{aligned} \quad (342)$$

Funkce má tedy v obou svých singulárních bodech jednostranné nevlastní limity. V obou singulárních bodech tudíž existují asymptoty bez směrnice.

Pro určení intervalů monotonie resp. konvexnosti a konkávnosti průběhu stačí vyšetřit znaménko první, resp. druhé derivace na vhodném jednostranném δ -okolí inflexního bodu. Vhodnými jednostrannými δ -okolími jsou v našem případě $U_{\delta}^*(0) = (-2, 0)$, resp. $U_{\delta}^+(0) = (0, 2)$, kde je f spojitá.

Dosadíme-li do první, resp. druhé derivace libovolný bod např. levého redukovaného okolí inflexního bodu (např. $x = -1$) dostáváme

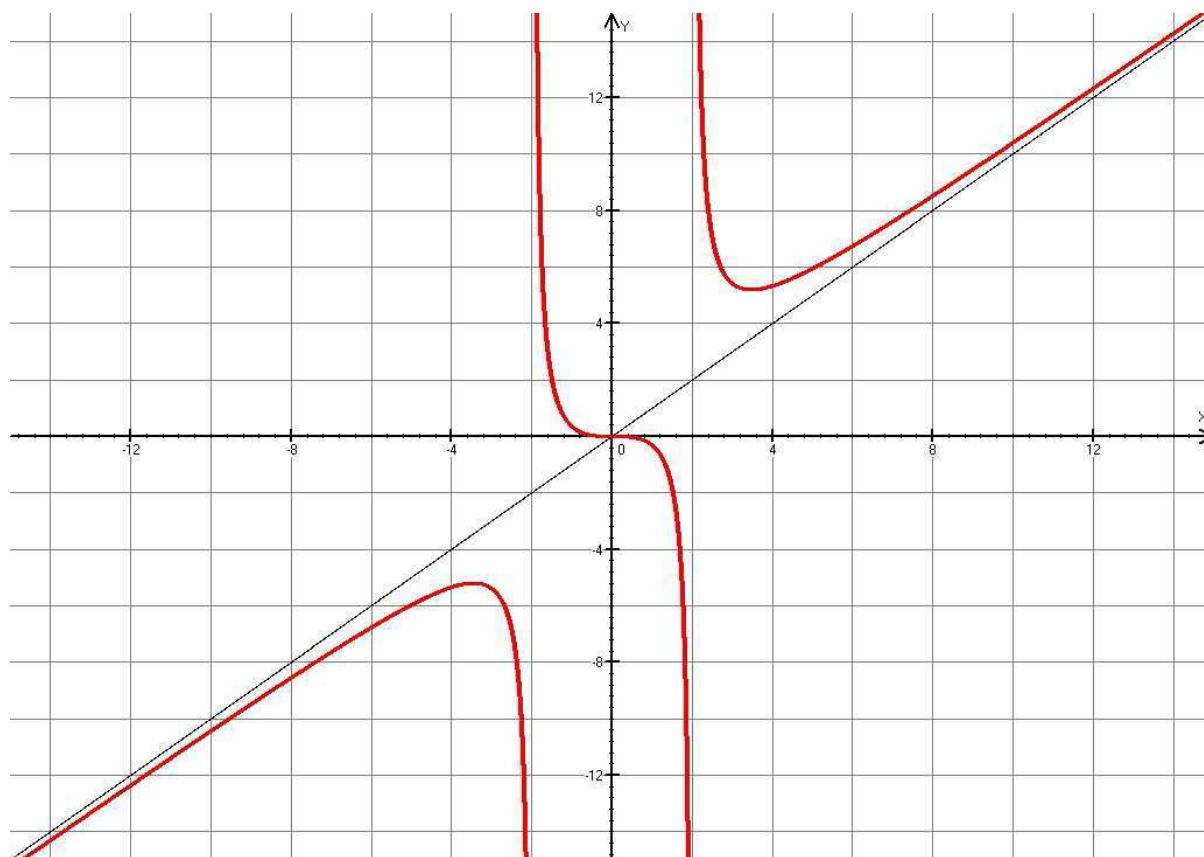
$$f'(-1) = -\frac{11}{9} < 0 \quad (343)$$

$$f''(-1) = \frac{104}{27} > 0. \quad (344)$$

V intervalu $(-2, 0)$ je tedy funkce f ryze konvexní a klesající, což současně znamená, že v intervalu $(0, 2)$ je f ryze konkávní a rostoucí. V intervalu $(-\infty, -2)$ neexistuje žádný inflexní ani singulární bod, zato zde existuje lokální maximum, takže f má zde všude ryze konkávní průběh. Existence maxima také znamená, že na podintervalu $(-\infty, -2\sqrt{3})$ je funkce rostoucí a na podintervalu $(-2\sqrt{3}, -2)$ naopak klesající. V intervalu $(2, \infty)$ jsou splněny obdobné podmínky, ale f zde má naopak lokální minimum. Proto má v tomto intervalu ryze konvexní průběh. Existence minima v tomto intervalu dále znamená, že na podintervalu $(2, 2\sqrt{3})$ funkce f klesá, zatímco na podintervalu $(2\sqrt{3}, \infty)$ všude roste.

Všechny tyto poznatky nám nyní již dovolují poměrně věrně zrekonstruovat graf vyšetřované funkce f :

Obr. 13



Slovní úlohy na výpočet lokálních extrémů funkce

Příklad 1 - Maximalizace obsahu

Mějme k dispozici 100 metrů drátěného pletiva, jímž máme oplotit pozemek tvaru pravoúhlého čtyřúhelníku tak, aby měl maximální obsah. Jaký bude poměr stran tohoto čtyřúhelníku?

Řešení:

$$2a + 2b = 100 \Rightarrow b = 50 - a \quad (345)$$

$$S = ab = 50a - a^2, \quad (346)$$

$$\frac{dS}{da} = -2a + 50 = 0 \quad (347)$$

$$a = 25 = b. \quad (348)$$

Největší plošný obsah tedy získáme, utvoříme-li čtverec o straně 25 m.

Modifikujme nyní tuto úlohu předpokladem, že jednu stranu našeho pozemku můžeme vymezit stěnou již stojící budovy.

Řešení:

$$2a + b = 100 \Rightarrow b = 100 - 2a, \quad (349)$$

$$S = ab = 100a - 2a^2, \quad (350)$$

$$\frac{dS}{da} = -4a + 100 = 0 \quad (351)$$

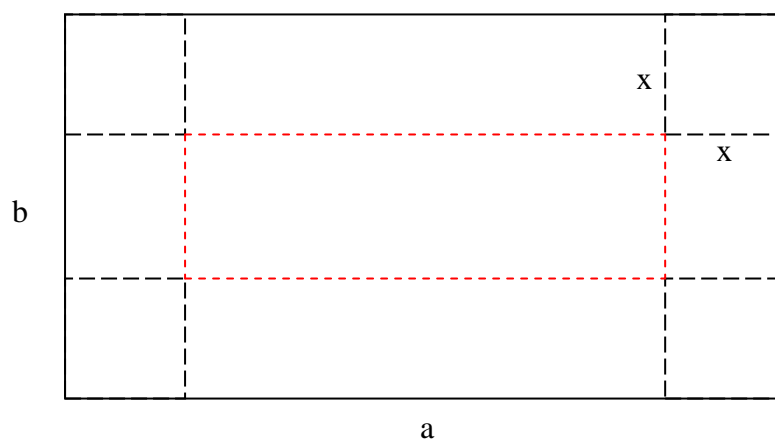
$$\begin{aligned} a &= 25, \\ b &= 50. \end{aligned} \quad (352)$$

V tomto případě je tedy délka ohrady při maximálním obsahu dvojnásobkem její šířky.

Příklad 2 - Maximalizace objemu

Mějme plech obdélníkového tvaru, v jehož rozích máme vystříhnout čtverce o straně x , tak, abychom po ohnutí plechu podél červených čar obdrželi krabici s maximálním objemem

Obr. 14



Řešení:

$$V = x(a - 2x)(b - 2x) = abx - 2ax^2 - 2bx^2 + 4x^3, \quad (353)$$

$$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 4(a + b)x + ab = 0, \quad (354)$$

$$x_{1,2} = \frac{4(a + b) \pm \sqrt{16(a + b)^2 - 48ab}}{24} = \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}. \quad (355)$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 24x - 4(a + b) < 0, \quad (356)$$

$$x < \frac{(a + b)}{6}. \quad (357)$$

Této podmínce zřejmě vyhovuje pouze řešení

$$x = \frac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}. \quad (358)$$

Příklad 3 - Minimalizace povrchu

Jaké rozměry musí mít litrová válcová konzerva, má-li spotřeba plechu na její výrobu včetně odpadu být co nejmenší?

Předpokládejme, že polotovarem je plech tvaru obdélníku.

Řešení:

Plech spotřebovaný na podstavu má tvar čtverce opsaného podstavě.

Součet obsahů obou podstav včetně odpadu je tedy $S_1 = 8r^2 \text{ dm}^2$.

Obsah pláště válce je $S_2 = 2\pi r v \text{ dm}^2$. Spotřebu plechu tedy vyjadřuje funkce

$$S = 8r^2 + 2\pi r v, \quad r, v \in (0, \infty), \quad (359)$$

což je funkce dvou proměnných r, v . Protože však

$$V = \pi r^2 v = 1 \text{ dm}^3, \quad (360)$$

plyne odtud

$$v = \frac{1}{\pi r^2}. \quad (361)$$

Po dosazení do vztahu (359) dostáváme

$$S = 8r^2 + \frac{2\pi r}{\pi r^2} = 8r^2 + 2r^{-1} \quad (362)$$

a po zderivování

$$\frac{dS}{dr} = 16r - 2r^{-2} \quad (363)$$

položíme $\frac{dS}{dr} = 0$ a máme rovnici

$$16r - \frac{2}{r^2} = 0, \quad (364)$$

která má jediný kladný kořen $r = \frac{1}{2}$ dm, čemuž odpovídá výška

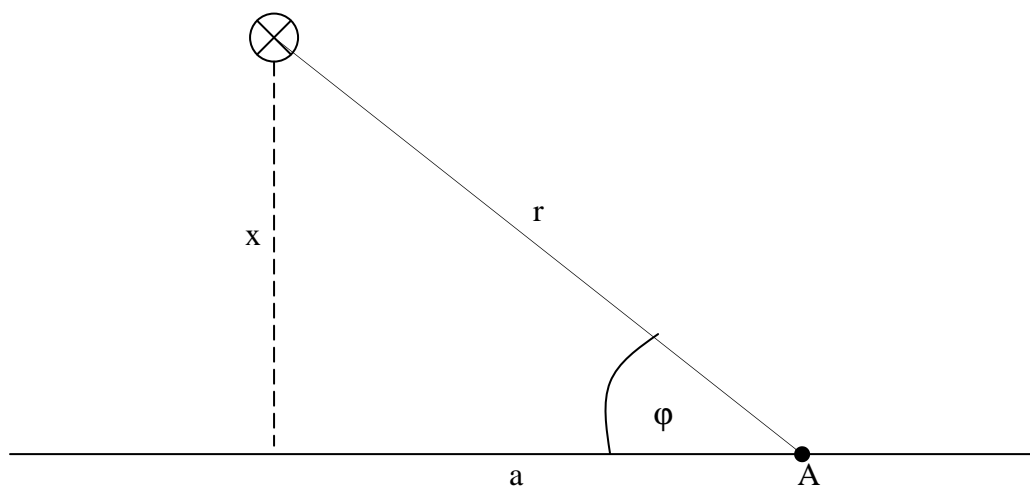
$$v = \frac{4}{\pi} \text{ dm, odkud}$$

$$S_{\min} = 6 \text{ dm}^2. \quad (365)$$

Příklad 4 - Optimalizace osvětlení plochy

V jaké výšce nad osvětlovanou rovinou je třeba umístit bodový zdroj světla, aby osvětlení E bylo maximální v bodě A ležícím ve vzdálenosti a od paty kolmice vedené od zdroje k osvětlované rovině

Obr. 15



Řešení:

Pro osvětlení platí známý vzorec

$$E = I \frac{\sin \varphi}{r^2}, \quad (366)$$

kde

$$r = \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{x}{\sin \varphi}. \quad (367)$$

Odtud máme

$$E = \frac{x}{r(x^2 + a^2)} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2} (x^2 + a^2)} = Ix(x^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}}. \quad (368)$$

Osvětlení je tedy funkcí jedné proměnné $x \in (0, \infty)$, jejíž derivace je

$$\frac{dE}{dx} = I(x^2 + a^2)^{-\frac{5}{2}}(a^2 - 2x^2). \quad (369)$$

Její nulovost vede (vzhledem k tomu, že $a > 0$) k rovnici

$$a^2 - 2x^2 = 0, \quad (370)$$

která má jediný kladný kořen

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}. \quad (371)$$

Z logiky úlohy je zřejmé, že jediným nenulovým extrémem funkce $E(x)$ je právě maximum osvětlení v bodě A. Dosazením nalezené výšky x bodového světelného zdroje nad osvětlovanou rovinou do

vztahu (366) pro osvětlení, nalézáme hodnotu maximálního dosažitelného osvětlení v bodě A:

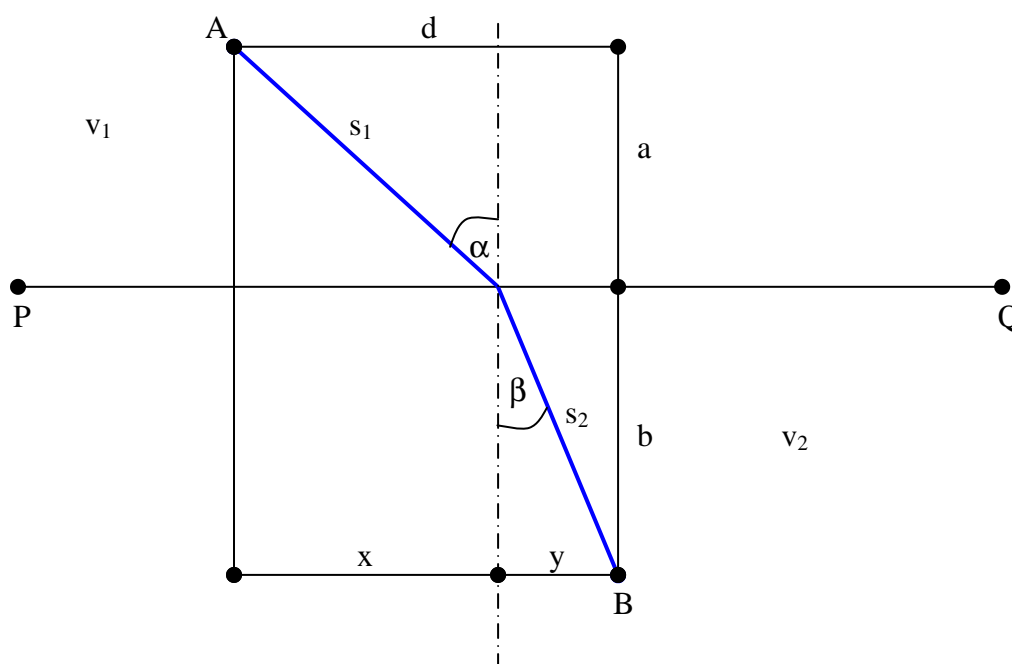
$$E_{\max} = I \frac{a}{\sqrt{2}} \left(\frac{a^2}{2} + a^2 \right)^{\frac{3}{2}} = I \frac{a}{\sqrt{2}} \left(\frac{3a^2}{2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4I}{\sqrt{108a^2}}. \quad (372)$$

Příklad 5 - Odvození Snellova zákona z Fermatova variačního principu

Budiž bod A stanovištěm plavčíka a bod B místem na moři, kde tonoucí zoufale volá o pomoc. Přímka procházející body P, Q budiž rozhraním mezi mořem a souší.

Označme v_1 rychlost, kterou se plavčík, spěchající na pomoc tonoucímu, pohybuje po souši a v_2 rychlost, jíž se pohybuje v moři. Úkol zní nalézt takovou trajektorii z bodu A do bodu B, po níž se plavčík dostane k tonoucímu za co nejkratší čas.

Obr. 16



Řešení:

Z Pythagorovy věty pro délku trajektorie dostáváme

$$s = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2} \quad (373)$$

což je funkce dvou proměnných x, y , kterou dále upravíme na tvar

$$s = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}, \quad (374)$$

čímž jsme eliminovali proměnnou y . Pro čas t potom platí

$$t = \frac{s}{v} = \sum_{i=1}^2 \frac{s_i}{v_i} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2}. \quad (375)$$

Nyní vypočteme derivaci času podle x :

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2} \right) = \\ &= \frac{1}{v_1} \frac{d}{dx} (a^2 + x^2) \frac{d}{dx} \sqrt{u} + \frac{1}{v_2} \frac{d}{dx} (b^2 + d^2 - 2dx + x^2) \frac{d}{dx} \sqrt{w} = \\ &= \frac{1}{v_1} 2x \frac{1}{2\sqrt{u}} + \frac{1}{v_2} (2x - 2d) \frac{1}{2\sqrt{w}} = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{u}} - \frac{d - x}{v_2 \sqrt{w}} = \\ &= \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}} = \frac{\sin \alpha}{v_1} + \frac{\sin \beta}{v_2}. \end{aligned} \quad (376)$$

Pro minimální čas tak musí platit

$$\frac{dt}{dx} = 0, \quad (377)$$

$(t_{\max} = \infty)$ takže dostáváme konečný výsledek pro hledanou dráhu

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (378)$$



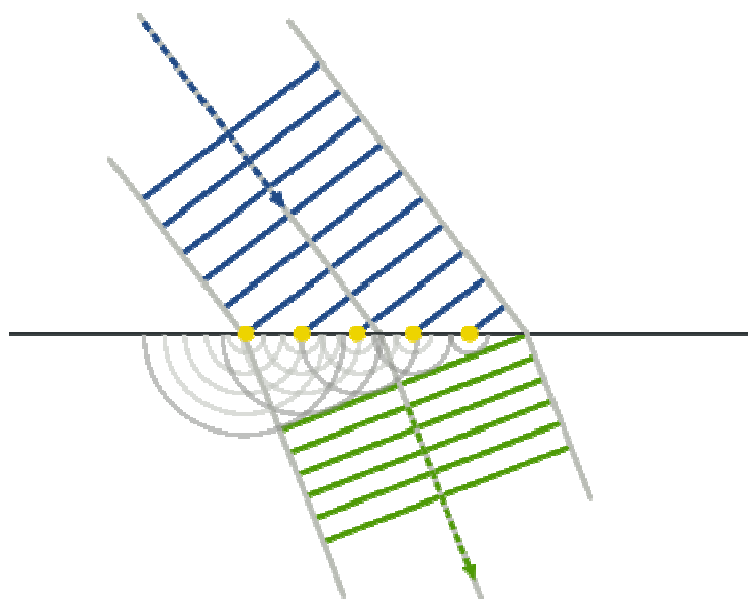
Willebrord Snellius (1580 – 1626)



Christiaan Huygens (1629 – 1695)

To je ovšem známý Snellův zákon, který lze odvodit rovněž z Huygensova principu vlnové mechaniky a tedy např. i optiky (viz obr. 17).

Obr. 17

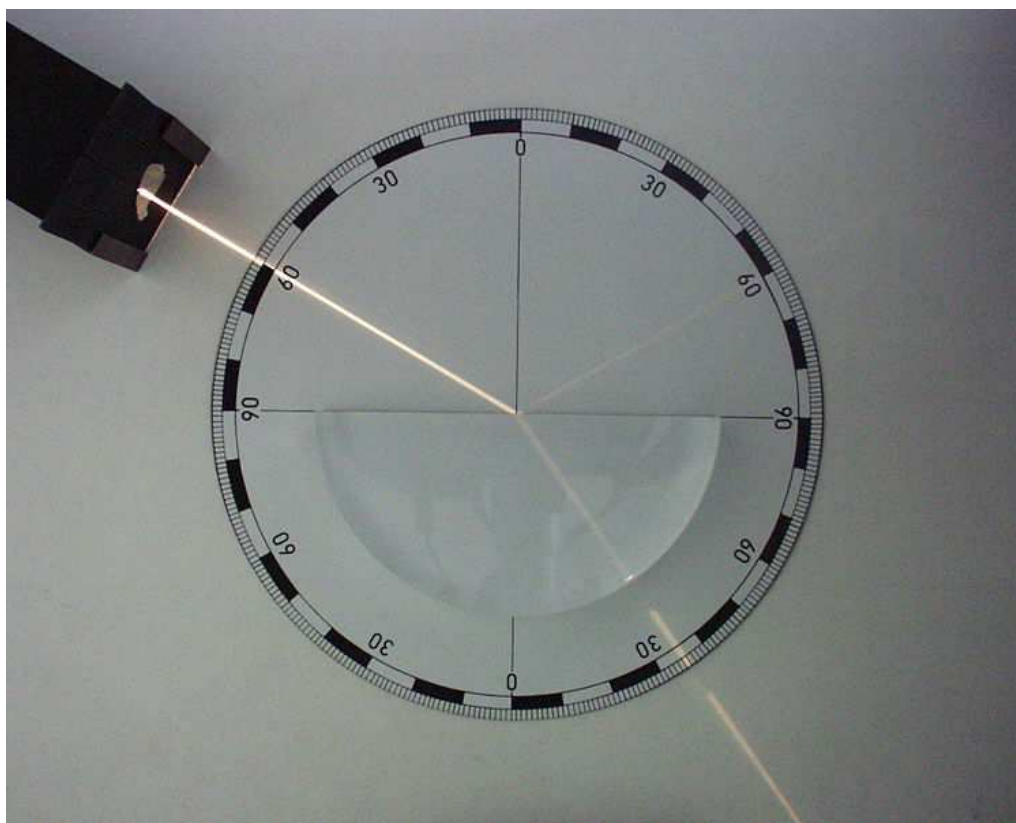


Fotony se tedy vždy šíří takovou cestou, která jim zabere minimální čas, což je věta známá jako **Fermatův princip**.



Pierre de Fermat (1601 – 1663)

Obr. 18



Příklad 6 - Výpočet rezonanční frekvence tlumeného harmonického oscilátoru

Harmonickým oscilátorem rozumíme fyzikální systém, jehož potenciální energie je kvadratickou funkcí souřadnic.

V nejjednodušším jednorozměrném případě si jej lze představit jako pohyb bodu pod vlivem síly, která je přímo úměrná vzdálenosti bodu od rovnovážné polohy a má opačný směr, tedy

$$F_e = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - x_0). \quad (379)$$

Jedná se o příklad tzv. **diferenciální rovnice druhého řádu**.

O některých typech diferenciálních rovnic budeme hovořit ve druhé části knihy, věnované integrálnímu počtu. V tomto případě se však bez integrálů obejdeme. Snadno totiž uhadneme, že řešením nemůže být nic jiného, než harmonická funkce

$$x = x_0 + x_{\max} \sin(\omega t + \varphi), \quad (380)$$

neboť právě harmonické funkce mají tu vlastnost, že jejich druhá derivace je přímo úměrná jim samým (srov. (153), (154)).

Parametry ve výrazu (380) jsou určeny počátečními podmínkami, okrajovými podmínkami a volbou soustavy souřadné. Parametr x_0 určuje tzv. rovnovážnou polohu oscilátoru (polohu, v níž se oscilátor nachází, pokud na něj nepůsobí žádné vnější síly) vzhledem ke zvolené souřadné soustavě. Tu proto zpravidla volíme tak, aby se bod x_0 nacházel v jejím počátku, čímž nám parametr x_0 z rovnic vypadne. Parametr x_{\max} je tzv. amplituda oscilátoru, tzn, jeho maximální výchylka z rovnovážné polohy. Parametr φ představuje fázi kmitů, takže závisí na volbě počátku časové osy (i tento parametr lze tudíž anulovat vhodnou volbou souřadnic) a konečně parametr ω je nám již dobře známá úhlová frekvence kmitání.

Zpětným dosazením (380) do rovnice (379) zjistíme, že

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (381)$$

Reálné fyzikální systémy jsou ovšem komplikovanější a kromě elastické složky F_e obsahují i disperzní složku F_d , která je lineární funkcí rychlosti pohybu oscilátoru a způsobuje postupný útlum amplitudy oscilací. Dodáváme-li navíc takovému systému energii působením vnější harmonické síly F_h , bude systém nakonec popsán rovnicí

$$F = F_e + F_d + F_h \quad (382)$$

neboli v řeči derivací

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - h \frac{dx}{dt} + F_a \sin(\Omega t). \quad (383)$$

Zavedeme-li ještě tzv. **koeficient útlumu** δ předpisem

$$2\delta = \frac{h}{m}, \quad (384)$$

můžeme diferenciální rovnici (383) přepsat ve tvaru

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{F_a}{m} \sin(\Omega t). \quad (385)$$

Dosažením známého partikulárního řešení (380) nabývá tato rovnice tvar

$$\begin{aligned} -x_{\max} \Omega^2 \sin(\Omega t + \varphi) + 2\delta x_{\max} \Omega \cos(\Omega t + \varphi) + \omega^2 x_{\max} \sin(\Omega t + \varphi) = \\ = \frac{F_a}{m} \sin(\Omega t), \end{aligned} \quad (386)$$

který lze dále upravit do finální podoby s pomocí goniometrických identit

$$\begin{aligned}\sin(\Omega t + \varphi) &= \sin(\Omega t)\cos\varphi + \cos(\Omega t)\sin\varphi, \\ \cos(\Omega t + \varphi) &= \cos(\Omega t)\cos\varphi - \sin(\Omega t)\sin\varphi,\end{aligned}\quad (387)$$

odkud

$$\begin{aligned}x_{\max} \left[(\omega^2 - \Omega^2)\cos\varphi - 2\delta\Omega\sin\varphi \right] \sin(\Omega t) + \\ + x_{\max} \left[(\omega^2 - \Omega^2)\sin\varphi - 2\delta\Omega\cos\varphi \right] \cos(\Omega t) = \frac{F_a}{m} \sin(\Omega t).\end{aligned}\quad (388)$$

Rovnice je splněna právě tehdy, platí-li současně

$$\begin{aligned}x_{\max} \left[(\omega^2 - \Omega^2)\cos\varphi - 2\delta\Omega\sin\varphi \right] &= \frac{F_a}{m}, \\ x_{\max} \left[(\omega^2 - \Omega^2)\sin\varphi - 2\delta\Omega\cos\varphi \right] &= 0.\end{aligned}\quad (389)$$

Umocněním a následným sečtením obou rovnic dostáváme

$$x_{\max} = \frac{F_a}{m} \left[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2 \right]^{\frac{1}{2}}.\quad (390)$$

Pro nalezení extrému amplitudy položíme

$$\frac{d}{d\Omega} x_{\max} = \frac{2F_a\Omega(\omega^2 - \Omega^2 - 2\delta)}{m \left[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = 0.\quad (391)$$

Odtud plynou 2 frekvence budících kmitů, v nichž má amplituda $x_{\max}(\Omega)$ svůj extrém:

$$\Omega = \begin{cases} 0 \\ \sqrt{\omega^2 - 2\delta^2} \end{cases} \quad (392)$$

První z extrémů je zjevně minimum, takže druhý extrém představuje hledanou rezonanční frekvenci (frekvenci budících kmitů, při níž nabývá amplituda tlumeného harmonického oscilátoru svého maxima).

Leibnizův integrál



Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716)

Primitivní funkce

Nechť f je funkce, jejíž definiční obor obsahuje interval (a,b) . Funkci F nazveme **primitivní funkcí** k funkci f na intervalu (a,b) , platí-li

$$\forall x \in (a,b): \frac{dF(x)}{dx} = f(x), \quad (393)$$

což značíme

$$\int f(x) dx = F(x), \quad (394)$$

kterýžto výraz nazýváme **Leibnizův integrál**.

Jak vidno z definice, je Leibnizův integrál inverzním operátorem k derivaci. Jinými slovy, Leibnizův integrál zobrazuje funkci f' na funkci f . Toto zobrazení je ve skutečnosti jednoznačné až na konstantu, jak si ihned ukážeme

Leibnizova věta

Nechť F, G jsou dvě primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b) . Potom se funkce F a G liší o konstantu, neboli

$$\forall x \in (a, b) \exists c \in (a, b) : F(x) = G(x) + c. \quad (395)$$

Důkaz:

Položme

$$H(x) = F(x) - G(x). \quad (396)$$

Potom

$$\forall x \in (a, b) : H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0. \quad (397)$$

To však podle Lagrangeovy věty znamená, že

$$\exists x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2, \exists c \in (x_1, x_2) : H(x_2) - H(x_1) = H'(c)(x_2 - x_1) = 0. \quad (398)$$

Proto

$$\forall x_i \in (a, b) : H(x_1) = H(x_2) \equiv c. \quad (399)$$

Odtud již plyne dokazovaná rovnost

$$F(x) - G(x) = c. \quad (400)$$

Příklad 1:

Vypočtěme Leibnizův integrál funkce

$$f(x) = \sin x \cos x. \quad (401)$$

Při výpočtu můžeme postupovat dvěma různými způsoby:

1)

$$\begin{aligned} \sin x \cos x &= \frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cos x = \frac{\sin(2x)}{2} = \frac{1}{4} \cdot 2 \sin(2x) = \frac{1}{4} \cdot \sin(2x)(2x)' = \\ &= \left(-\frac{\cos(2x)}{4} \right)', \end{aligned} \quad (402)$$

odkud tedy

$$\int \sin x \cos x \, dx = -\frac{\cos(2x)}{4} \quad (403)$$

2)

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin x (\sin x)' = \frac{1}{2} (\sin^2 x)' = \left(\frac{\sin^2 x}{2} \right)', \quad (404)$$

odkud

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2}. \quad (405)$$

Odečteme-li od sebe obě nalezené primitivní funkce, dostáváme hledanou konstantu

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\cos(2x)}{4} = \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{4} = \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{1 - 2\sin^2 x}{4} = \\
 &= \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

(406)

Metody výpočtu Leibnizova integrálu

Metoda přímého invertování derivace

U jednoduchých funkcí lze využít jednoduchosti jejich derivací a vlastnosti (393) Leibnizova integrálu:

Příklady:

$$(ax)' = a \Rightarrow \int a \, dx = ax + c, \quad (407)$$

$$(e^x)' = e^x \Rightarrow \int e^x \, dx = e^x + c, \quad (408)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \int x^{-1} \, dx = \ln|x| + c, \quad (409)$$

$$(\sin x)' = \cos x \Rightarrow \int \cos x \, dx = \sin x + c, \quad (410)$$

$$(-\cos x)' = \sin x \Rightarrow \int \sin x \, dx = -\cos x + c, \quad (411)$$

$$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{\ln a}{\ln a} a^x = a^x \Rightarrow \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad (412)$$

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{n+1}{n+1}x^n = x^n \Rightarrow \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad (413)$$

Metoda per partes

Nechť J je interval a $f, g : J \rightarrow R$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na tomto intervalu. Potom existuje primitivní funkce $H : J \rightarrow R$ k funkci $(fg') : J \rightarrow R$ a funkce $(fg - H) : J \rightarrow R$ je primitivní k funkci $(f'g) : J \rightarrow R$.

Důkaz:

Z předpokladu věty plyne, že $f : J \rightarrow R$, $g : J \rightarrow R$, $f' : J \rightarrow R$, $g' : J \rightarrow R$ jsou spojitě funkce. Potom též $(fg') : J \rightarrow R$ je spojitá funkce (viz věta o spojitosti součinu funkcí). Proto k ní existuje primitivní funkce $H : J \rightarrow R$, tzn., jejíž derivace

$$H' = fg'. \quad (414)$$

Z věty o derivaci součinu

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (415)$$

pak integrací obou jejích stran okamžitě plyne

$$\int (fg)' = fg = \int f'g + \int fg', \quad (416)$$

neboli

$$\int f'g = fg - \int fg'. \quad (417)$$

Příklady použití metody per partes

Jak je vidno z důkazu, metoda per partes invertuje derivace součinu funkcí. Používá se tedy pro integraci funkcí ve tvaru součinu jednodušších funkcí, které jsme schopni integrovat např. metodou přímého invertování derivace (viz výše). Uveďme si několik jednoduchých příkladů per partes integrování:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$f' = 1, \quad f = x, \quad g = \ln x, \quad g' = \frac{1}{x}$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3(3 \ln x - 1)}{9}$$

$$f' = x^2, \quad f = \frac{x^3}{3}, \quad g = \ln x, \quad g' = \frac{1}{x}$$

$$\int x \cdot 10^x \, dx = \frac{x \cdot 10^x}{\ln 10} - \frac{1}{\ln 10} \int 10^x dx = \frac{x \cdot 10^x}{\ln 10} - \frac{10^x}{\ln^2 10} = \frac{10^x(x \ln 10 - 1)}{\ln^2 10}$$

$$f' = 10^x, \quad f = \frac{10^x}{\ln 10}, \quad g = x, \quad g' = 1$$

$$\begin{aligned} \int \arctan x \, dx &= x \arctan x - \int \frac{1}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \\ &= x \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} \end{aligned}$$

$$f' = 1, \quad f = x, \quad g = \arctan x, \quad g' = \frac{1}{1+x^2}$$

Některé funkce vyžadují, pro své úplné zintegrování, opakované použití metody:

$$\int x \ln^2 x \, dx = \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \int \frac{x^2}{2} \frac{2 \ln x}{x} \, dx = \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \int x \ln x \, dx$$

$$f' = x, \quad f = \frac{x^2}{2}, \quad g = \ln^2 x, \quad g' = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4}$$

$$f' = x, \quad f = \frac{x^2}{2}, \quad g = \ln x, \quad g' = \frac{1}{x}$$

$$\int x \ln^2 x \, dx = \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2} \left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2} \right)$$

$$\int e^{2x} \cos x \, dx = e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x \, dx$$

$$f' = \cos x, \quad f = \sin x, \quad g = e^{2x}, \quad g' = 2e^{2x}$$

$$\int e^{2x} \sin x \, dx = -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x \, dx$$

$$f' = \sin x, \quad f = -\cos x, \quad g = e^{2x}, \quad g' = 2e^{2x}$$

$$\int e^{2x} \cos x \, dx = e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4 \int e^{2x} \cos x \, dx$$

$$5 \int e^{2x} \cos x \, dx = e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x$$

$$\int e^{2x} \cos x \, dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x)$$

$$\int x^2 \sin(2x) dx = 2 \int x^2 \sin x \cos x dx =$$

$$= 2 \left(x^2 \sin^2 x - \int 2x \sin^2 x dx - \int x^2 \sin x \cos x dx \right)$$

$$f' = \cos x, \quad f = \sin x, \quad g = x^2 \sin x, \quad g' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

$$\int 2x \sin^2 x dx = x^2 \sin^2 x - 2 \int x^3 \cos^2 x dx$$

$$f' = 2x, \quad f = x^2, \quad g = \sin^2 x, \quad g' = 2x \cos x$$

$$\int x^3 \cos^2 x dx = x^3 \sin x - 3 \int x^2 \sin x dx$$

$$f' = \cos x, \quad f = \sin x, \quad g = x^3, \quad g' = 3x^2$$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx$$

$$f' = \sin x, \quad f = -\cos x, \quad g = x^2, \quad g' = 2x$$

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x$$

$$\int 2x \sin^2 x dx = x^2 \sin^2 x - 2 \left\{ x^3 \sin x - 3 \left[2(x \sin x + \cos x) - x^2 \cos x \right] \right\} =$$

$$= -x^2 \sin^2 x + 2x^3 \sin x + 6x^2 \cos x - 12x \sin x - 12 \cos x$$

$$\int x^2 \sin(2x) dx = 2x^3 \sin x + 6x^2 \cos x - 12x \sin x - 12 \cos x =$$

$$= 2 \sin x (x^3 - 6x) + 6 \cos x (x^2 - 2x)$$

První věta o substituci

Nechť I, J jsou dva intervaly.

Nechť funkce $\varphi(J \rightarrow I)$ je diferencovatelná a funkce $f(I \rightarrow \mathbb{R})$ je spojitá.

Nechť $F(I \rightarrow \mathbb{R})$ je primitivní k funkci $f(I \rightarrow \mathbb{R})$.

Potom funkce

$$F \circ \varphi(J \rightarrow \mathbb{R}) \quad (418)$$

je primitivní k funkci

$$(f \circ \varphi)\varphi'(J \rightarrow \mathbb{R}). \quad (419)$$

Důkaz:

Podle předpokladu věty platí

$$F' = f. \quad (420)$$

Potom

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi', \quad (421)$$

což po zintegrování obou stran dává konečný výsledek

$$\int (f \circ \varphi)\varphi' = F \circ \varphi \equiv \left(\int f \right) \circ \varphi. \quad (422)$$

Příklady použití substituční metody

Jak plyne z důkazu věty, substituční metoda integrování invertuje derivace komposice funkcí. Je tedy vhodná pro integraci funkcí ve tvaru komposice jednodušších funkcí. Uveďme si opět několik jednoduchých příkladů integrování touto metodou:

$$\int \frac{e^x}{4+e^x} dx = \int \frac{1}{4+y} dy = \ln|4+y| = \ln|4+e^x| \quad (423)$$

$$y = e^x, \quad \frac{dy}{dx} = e^x, \quad dy = e^x dx$$

Zde jsme využili skutečnost, že

$$(\ln f(x))' = (\ln u)' f'(x) = \frac{1}{u} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad (424)$$

neboli

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|. \quad (425)$$

Další příklady:

$$\int \frac{\ln^4 x}{x} dx = \int \ln^4 x \frac{1}{x} dx = \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} = \frac{\ln^5 x}{5}$$

$$y = \ln x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad dx = \frac{1}{t} dt$$

$$\int 2e^{x^3} t^2 dt = \frac{2}{3} \int e^{x^3} \cdot 3t^2 dt = \frac{2}{3} \int e^y dx = \frac{2}{3} e^y = \frac{2}{3} e^{t^3}$$

$$y = x^3, \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2, \quad dy = 3x^2 dx$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{y} dy = \ln |y| = \ln |\ln x|$$

$$y = \ln x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad dy = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{\sqrt{x} e}{x^2} dx = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = - \int e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx = - \int e^y dy = -e^y = -e^{\frac{1}{x}} = -\sqrt{x} e$$

$$y = \frac{1}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}, \quad dy = -\frac{1}{x^2} dx$$

$$\int \sqrt[8]{2x+5} dx = \frac{1}{2} \int 2 \sqrt[8]{2x+5} dx = \frac{1}{2} \int y^{\frac{1}{8}} dy = \frac{1}{2} \frac{8}{9} y^{\frac{9}{8}} = \frac{4}{9} \sqrt[8]{(2x+5)^9}$$

$$y = 2x+5, \quad \frac{dy}{dx} = 2, \quad dy = 2dx$$

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x)$$

$$y = 2x, \quad \frac{dy}{dx} = 2, \quad dy = 2dx$$

$$\int \cos(2x) = \frac{1}{2} \int \cos y dy = \frac{1}{2} \sin y = \frac{\sin(2x)}{2}$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} = \frac{2x - \sin(2x)}{4}$$

Zcela analogicky

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \frac{2x + \sin(2x)}{4}$$

Podobně, jako v případě per partes integrace, také při substitučním integrování je možno použít metodu opakovaně, popř. obě dvě metody vzájemně kombinovat:

$$\int \frac{\ln(\arctan x)}{(1+x^2)\arctan x} dx = \int \frac{\ln(\arctan x)}{\arctan x} \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{\ln y}{y} dy$$

$$y = \arctan x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad dy = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\int \frac{\ln(\arctan x)}{(1+x^2)\arctan x} dx = \int \frac{\ln y}{y} dx = \int z dz = \frac{z^2}{2} = \frac{\ln^2 y}{2} = \frac{\ln^2(\arctan x)}{2}$$

$$z = \ln y, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}, \quad dy = \frac{1}{x} dx$$

$$\int xe^{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{\sqrt{x^3} e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int y^3 e^y dy$$

$$y = \sqrt{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$\int y^3 e^y dy = e^y y^3 - 3 \int y^2 e^y dy$$

$$f' = e^y, \quad f = e^y, \quad g = y^3, \quad g' = 3y^2$$

$$\int y^2 e^y dy = e^y y^2 - 2 \int ye^y dy$$

$$f' = e^y, \quad f = e^y, \quad g = y^2, \quad g' = 2y$$

$$\int ye^y dy = ye^y - \int e^y dy = (y-1)e^y$$

$$f' = e^y, \quad f = e^y, \quad g = y, \quad g' = 1$$

$$\int xe^{\sqrt{x}} dx = 2e^y [y^3 - 3y^2 - 6(y-1)] = 2e^{\sqrt{x}} [\sqrt{x^3} - 3x - 6(\sqrt{x} - 1)]$$

$$\int \ln^2 x \, dx = \int x \ln^2 x \frac{1}{x} dx = \int y^2 e^y dy = e^y [y^2 - 2(y-1)] =$$

$$= x [\ln^2 x - 2(\ln x - 1)]$$

$$y = \ln x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad dy = \frac{1}{x} dx$$

V posledním příkladu jsme využili výsledků integrace z předposledního příkladu.

Druhá věta o substituci

Nechť I, J jsou intervaly.

Nechť $f(I \rightarrow \mathbb{R})$ je spojitá funkce a $\varphi(J \rightarrow I)$ je spojitě diferencovatelná bijekce.

Nechť dále $G(J \rightarrow \mathbb{R})$ je primitivní funkce k funkci

$$(f \circ \varphi)\varphi'(J \rightarrow \mathbb{R}). \quad (426)$$

Potom

$$G \circ \varphi^{-1}(J \rightarrow \mathbb{R}) \quad (427)$$

je primitivní k funkci $f(I \rightarrow \mathbb{R})$.

Důkaz:

Ze spojitosti funkce $f(I \rightarrow \mathbb{R})$ vyplývá existence její primitivní funkce

$$F(I \rightarrow \mathbb{R}): F' = f \quad (428)$$

Proto je funkce $(f \circ \varphi)(J \rightarrow \mathbb{R})$ diferencovatelná a

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi'. \quad (429)$$

Funkce

$$(f \circ \varphi)(J \rightarrow \mathbb{R}) \quad (430)$$

je tak primitivní k funkci

$$(f \circ \varphi)\varphi'(J \rightarrow \mathbb{R}). \quad (431)$$

Odtud vyplývá, že

$$\exists c \in \mathbb{R} : [\forall x \in J : G(x) = (F \circ \varphi)(x) + c]. \quad (432)$$

Potom

$$\begin{aligned} \forall x \in I : (G \circ \varphi^{-1})(x) &= G(\varphi^{-1}(x)) = (F \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x)) + c = \\ &= [F(\varphi \circ \varphi^{-1})](x) + c = F(x) + c, \end{aligned} \quad (433)$$

Odkud

$$\forall x \in I : (G \circ \varphi^{-1})'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x). \quad (434)$$

To ale znamená, že vskutku $G \circ \varphi^{-1}(J \rightarrow \mathbb{R})$ je primitivní k funkci $f(I \rightarrow \mathbb{R})$, neboli

$$\int f = \left[\int (f \circ \varphi^{-1})\varphi' \right] \circ \varphi^{-1}. \quad (435)$$

Příklad:

Vypočti na intervalu $x \in (-1, \infty)$ následující integrál

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \quad (436)$$

Řešení:

Zavedeme substituci

$$y = \sqrt{x+1} \equiv \varphi^{-1}(x), \quad (437)$$

odkud invertováním plyne

$$x = y^2 - 1 \equiv \varphi(y),$$

$$\frac{dx}{dy} = 2y \equiv \varphi'(y), \quad (438)$$

$$dx = 2y dy.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \int \frac{y^2 - 1}{y} \cdot 2y dy = 2 \int (y^2 - 1) dy = 2 \int y^2 dy - 2 \int dy = \\ &= 2y \left(\frac{y^2}{3} - 1 \right) = \frac{2}{3} \sqrt{x+1} (x - 2). \end{aligned} \quad (439)$$

Speciální substituce

Volba správné substituce může být u komplikovanějších integrálů poměrně obtížnou záležitostí. V této sekci si proto uvedeme substituce užívané standardně pro integraci několika nejběžněji se vyskytujících typů funkcí:

a) Integrály typu

$$\int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} R(x) dx \quad (440)$$

Řešíme substitucí

$$y = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad x = \frac{dy^2 - b}{a - cy^2}, \quad dx = \frac{2(ad - bc)y}{(a - cy^2)^2} dy. \quad (441)$$

b) Integrály typu

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \quad (442)$$

řešíme substitucí

$$y = \tan \frac{x}{2}, \quad (443)$$

při které platí

$$\sin x = \frac{2y}{1+y^2}, \quad \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad dx = \frac{2}{1+y^2} dy. \quad (444)$$

c) Integrály typu

$$\int \sin^m x \cos^n x dx \quad (445)$$

řešíme v závislosti na paritě exponentů m a n .

1) jsou-li $m, n \geq 0$ obě sudá, použijeme buď goniometrických vzorců

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad (446)$$

nebo substituce

$$y = \tan x, \quad dy = 1 + \tan^2 x dx. \quad (447)$$

2) je-li n liché, nejprve upravíme integrand na tvar

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cos x dx, \quad (448)$$

a poté řešíme substitucí

$$y = \sin x, \quad dy = \cos x dx. \quad (449)$$

3) Je-li m liché, upravíme integrand na tvar

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \cos^n x (1 - \cos^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \sin x dx, \quad (450)$$

načež užitíme substituce

$$y = \cos x, \quad dy = -\sin x dx. \quad (451)$$

d) Eulerovy integrály

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx \quad (452)$$

řešíme různými substitucemi v závislosti na znaménku koeficientů a , b , c :

1) Pro $a > 0$ užijeme substituci

$$y \pm x\sqrt{a} = \sqrt{ax^2 + bx + c}, \quad (453)$$

2) Pro $c > 0$ užijeme substituci

$$\sqrt{c} \pm xy = \sqrt{ax^2 + bx + c}, \quad (454)$$

3) Pro $a < 0, b < 0$ užijeme substituci

$$y(x - x_0) = \sqrt{ax^2 + bx + c}, \quad (455)$$

kde x_0 je libovolný kořen polynomu $ax^2 + bx + c$.

Příklady integrace pomocí speciálních substitucí

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\frac{2y}{1+y^2}} \frac{2}{1+y^2} dy = \int \frac{1}{y} dy = \ln|y| = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

$$y = \tan \frac{x}{2} \equiv \varphi^{-1}(x), \quad x = 2 \arctan y \equiv \varphi(y), \quad \frac{dx}{dy} = \frac{2}{1+y^2} \equiv \varphi'(y)$$

$$dx = \frac{2}{1+y^2} dy, \quad \sin x = \frac{2y}{1+y^2},$$

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cos^2 x dx &= \int \frac{\sin^5 x \cos^2 x}{\sin x} dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \sin x dx = \\ &= -\int (1-y^2)^2 y^2 dx = -\int y^2 - 2y^4 + y^6 dy = -\frac{y^3}{3} + \frac{2y^5}{5} - \frac{y^7}{7} = \\ &= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} \end{aligned}$$

$$y = \cos x \equiv \varphi(x), \quad \frac{dy}{dx} = -\sin x \equiv \varphi'(x), \quad dy = -\sin x dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx &= \int \frac{1}{\frac{y^2+y+1}{2y+1}} \frac{2y^2+2y+2}{(2y+1)^2} dy = 2 \int \frac{1}{2y+1} dy = \\ &= \ln(2y+1) = \ln \left[2(\sqrt{x^2+x+1}+x)+1 \right] \end{aligned}$$

$$y-x = \sqrt{x^2+x+1}, \quad x^2+x+1 = y^2-2xy+x^2, \quad x = \frac{y^2-1}{2y+1} \equiv \varphi(y),$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y^2+2y+2}{(2y+1)^2} \equiv \varphi'(y), \quad \sqrt{x^2+x+1} = y - \frac{y^2-1}{2y+1} = \frac{y^2+y+1}{2y+1}$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{1}{(x+2)(3x+5)} \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}} dx = \\
& = \int \frac{y}{\left(\frac{3y^2-2}{1-2y^2}+2\right)\left(3\frac{3y^2-2}{1-2y^2}+5\right)} \frac{-2y}{(1-2y^2)^2} dy = \\
& = -2 \int \frac{1}{1+y^2} dt = -2 \arctan y = -2 \arctan \frac{x+2}{2x+3} \\
& y = \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}} \equiv \varphi^{-1}(x), \quad x = \frac{3y^2-2}{1-2y^2} \equiv \varphi(y), \\
& \frac{dx}{dy} = \frac{-2y}{(1-2y^2)^2} \equiv \varphi'(y), \quad dx = \frac{-2y}{(1-2y^2)^2} dy.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{4-2x-5x^2}} dx &= \frac{1}{\frac{-2(y^2-y-5)}{y^2+5}} \frac{-4(y^2-y-5)}{(y^2+5)^2} dy = \int \frac{2}{y^2+5} dy = \\
&= \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan \frac{y}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan \frac{2-\sqrt{4-2x-5x^2}}{x\sqrt{5}} \\
2-xy &= \sqrt{4-2x-5x^2}, \quad 4-2x-5x^2 = 4-4xy+x^2y^2, \\
-2-5x &= -4y+xy^2, \quad x = \frac{4y-2}{y^2+5}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{-4(y^2-y-5)}{(y^2+5)^2}, \\
\sqrt{4-2x-5x^2} &= 2 - \frac{4y-2}{y^2+5} y = \frac{-2(y^2-y-5)}{y^2+5}.
\end{aligned}$$

Integrovaní ryze racionálních lomených funkcí

Věta o racionálních kořenech polynomické funkce

Má-li algebraická rovnice

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (456)$$

všechny koeficienty celočíselné, pak

$$\forall \xi = \frac{p}{q} \in \ker(P), \xi \in \mathbb{Q}, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^+, \frac{p}{q} \notin \mathbb{N}, \frac{q}{p} \notin \mathbb{N} : \dots \frac{a_n}{q} \in \mathbb{N}, \frac{a_0}{p} \in \mathbb{N} \\ \dots \frac{P(m)}{p - mq} \in \mathbb{N} \quad (457)$$

Důkaz:

a)

Dosadíme do rovnice (456) za $x = \frac{p}{q}$:

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0 \quad | \cdot q^n \quad (458)$$

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Odtud je

$$\frac{p^n}{q} a_n = -\left(a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + \dots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1} \right), \quad (459)$$

$$\frac{q^n}{p} a_0 = -\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_2 p q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \right).$$

Protože na pravé straně obou těchto rovnic jsou celá čísla, musí i levé strany reprezentovat celá čísla. Protože p, q jsou dle předpokladu

nesoudělná čísla, musí číslo q dělit koeficient a_n , kdežto číslo p musí dělit koeficient a_0 .

b)

Rozložme polynom $P(x)$ v součet mocnin $(x-m)^k$, kde m je libovolné celé číslo:

$$b_n(x-m)^n + b_{n-1}(x-m)^{n-1} + \dots + b_1(x-m) + b_0, \quad (460)$$

kde b_i jsou vhodná celá čísla, přičemž $b_0 = P(m)$. Dosadíme-li sem

opět $x = \frac{p}{q}$, postupně dostaneme

$$\begin{aligned} b_n \left(\frac{p}{q} - m \right)^n + b_{n-1} \left(\frac{p}{q} - m \right)^{n-1} + \dots + b_1 \left(\frac{p}{q} - m \right) + b_0 &= 0 \quad | \cdot q^n \\ b_n \left[q \left(\frac{p}{q} - m \right) \right]^n + b_{n-1} \left[q \left(\frac{p}{q} - m \right) \right]^{n-1} q + \dots + b_1 \left[q \left(\frac{p}{q} - m \right) \right] q^{n-1} + b_0 q^n &= \\ = b_n (p - mq)^n + b_{n-1} (p - mq)^{n-1} q + \dots + b_1 (p - mq) q^{n-1} + b_0 q^n &= 0. \end{aligned} \quad (461)$$

odtud pro případ $p \neq mq$ máme

$$\frac{b_0 q^n}{p - mq} = - \left[b_n (p - mq)^{n-1} + b_{n-1} (p - mq)^{n-2} q + \dots + b_1 q^{n-1} \right]. \quad (462)$$

Ze stejného důvodu jako v bodě a) musí být číslo

$$\frac{b_0 q^n}{p - mq} \in \mathbb{Z}. \quad (463)$$

Protože číslo

$$\frac{p - mq}{q} = \frac{p}{q} - m \quad (464)$$

není pro $q \neq 1$ číslem celým, musí být čísla q a $p - mq$ nesoudělná. Proto číslo $p - mq$ dělí číslo $b_0 = P(m)$.

Příklad 1:

Rozložme následující polynomickou funkci

$$P(x) = x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 \quad (465)$$

na součin kořenových činitelů

Řešení:

$$p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \dots$$

$$m \equiv 1, P(1) = 24 \quad (466)$$

$$p - q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12$$

Vzhledem k tomu, že $q = 1$, mohou se z těchto možností realizovat pouze tyto:

$$p(1) = 2, p(2) = 3, p(4) = 5 \quad (467)$$

$$p(-2) = -1, p(-3) = -2, p(-4) = -3, p(-6) = -5$$

Máme tedy množinu podezřelých bodů – kandidátů na prvky $\ker(P)$

$$p - q = 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, -6 \quad (468)$$

Pro rozpoznání, které z těchto podezřelých bodů jsou opravdovými kořeny vyšetřovaného polynomu, lze použít např. tzv. **Hornerovo síto**:



William George Horner (1786 – 1837)

Tabulka 2

$x = \frac{p}{q}$	1	-14	71	-154	120
2	1	-12	47	-60	0
3	1	-11	38	-40	0
4	1	-10	31	-30	0
5	1	-9	26	-24	0
-1	1	-15	86	-240	360
-2	1	-16	103	-360	840
-3	1	-17	122	-366	1218
-5	1	-19	166	-830	4270

V něm je prvkem buňky vždy součet příslušného koeficientu polynomu v odpovídajícím sloupci tabulky (horní záhlaví tabulky) a součinu podezřelého bodu v odpovídajícím řádku tabulky (levé záhlaví tabulky) s hodnotou sousední buňky vlevo od buňky počítané. Pokud se nalevo od počítané buňky již nenachází žádná další buňka, počítá se tato neexistující buňka automaticky jako virtuální buňka s hodnotou nula. Podezřelé body, které projdou Hornerovým sítím s výslednou hodnotou 0 v posledním sloupci tabulky (napravo) jsou hledanými kořeny vyšetřovaného polynomu.

Konečný rozklad vyšetřovaného polynomu do kořenových činitelů tedy zní:

$$P(x) = x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = (x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5). \quad (469)$$

Příklad 2:

Vypočtěme integrál

$$\int \frac{x^3 - 7x^2 + 16x + 1}{x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120} dx. \quad (470)$$

Řešení:

Využijeme skutečnosti, že polynom tvořící jmenovatel integrandu jsme již v minulé úloze rozložili na součin kořenových činitelů. Můžeme tedy rovnou psát

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 7x^2 + 16x + 1}{x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120} dx &= \int \frac{x^3 - 7x^2 + 16x + 1}{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} dx = \\ &= \int \frac{2^3 - 7 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 + 1}{(x-2)(2-3)(2-4)(2-5)} dx + \int \frac{3^3 - 7 \cdot 3^2 + 16 \cdot 3 + 1}{(3-2)(x-3)(3-4)(3-5)} dx + \\ &+ \int \frac{4^3 - 7 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4 + 1}{(4-2)(4-3)(x-4)(4-5)} dx + \int \frac{5^3 - 7 \cdot 5^2 + 16 \cdot 5 + 1}{(5-2)(5-3)(5-4)(x-5)} dx = \\ &= \int -\frac{13}{6x-12} + \frac{13}{2x-6} - \frac{17}{2x-8} + \frac{31}{6x-30} dx = \\ &= \frac{13}{2} \int (x-3)^{-1} dx - \frac{13}{6} \int (x-2)^{-1} dx - \frac{17}{2} \int (x-4)^{-1} dx + \frac{31}{6} \int (x-5)^{-1} dx = \\ &= \frac{13}{2} \ln|x-3| - \frac{13}{6} \ln|x-2| - \frac{17}{2} \ln|x-4| + \frac{31}{6} \ln|x-5| \end{aligned} \quad (471)$$

Příklad 3:

Vypočtěme integrál

$$\int \frac{2x^3 + 4x^2 - x + 5}{x^3 - 4x^2 - 4x + 16} dx \quad (472)$$

Řešení:

$$q = 1,$$

$$p = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16,$$

$$P(1) = 9,$$

$$\pm 1, \pm 3, \pm 9 \mid 9$$

$$p - q = 1, \pm 3, -9$$

$$p(1) = 2, p(-3) = -2, p(3) = 4, p(-9) = -8$$

(473)

Hornerovo síto má tedy tvar

Tabulka 3

$x = \frac{p}{q}$	1	-4	-4	16
2	1	-2	-8	0
-2	1	-6	8	0
4	1	0	-4	0
-8	1	-12	92	-720

První 3 podezřelé body jím prošly a jsou tedy skutečnými kořeny vyšetřovaného polynomu. Odtud

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 + 4x^2 - x + 5}{x^3 - 4x^2 - 4x + 16} dx &= \int \frac{2x^3 + 4x^2 - x + 5}{(x+2)(x-2)(x-4)} dx = \\ &= \int \frac{7}{(x+2)(-2-2)(-2-4)} + \frac{35}{(2+2)(x-2)(2-4)} + \\ &\quad + \frac{193}{(4+2)(4-2)(x-4)} + c dx = \\ &= \int \frac{7}{24}(x+2)^{-1} - \frac{35}{8}(x-2)^{-1} + \frac{193}{12}(x-4)^{-1} + c dx \end{aligned} \quad (474)$$

Konstantu c určíme pro $x = 1$ jako rozdíl

$$c = \frac{2+4-1+5}{1-4-4+16} - \left(\frac{7}{24(1+2)} - \frac{35}{8(1-2)} + \frac{193}{12(1-4)} \right) = 2. \quad (475)$$

Máme tedy výsledek

$$\begin{aligned} & \int \frac{2x^3 + 4x^2 - x + 5}{x^3 - 4x^2 - 4x + 16} dx = \\ & = \frac{7}{24} \int (x+2)^{-1} dx - \frac{35}{8} \int (x-2)^{-1} dx + \frac{193}{12} \int (x-4)^{-1} dx + \int 2 dx = \\ & = \frac{7}{24} \ln|x+2| - \frac{35}{8} \ln|x-2| + \frac{193}{12} \ln|x-4| + 2x \end{aligned} \quad (476)$$

Integrovaní obecných racionálních lomených funkcí

Ne každý polynom lze rozložit na součin reálných kořenových činitelů. Ne každou racionální lomenou funkci tak lze vyjádřit jako součet elementárních zlomků, které dokážeme snadno integrovat. Racionální lomené funkce u nichž to lze a se kterými jsme se setkali v minulém odstavci, nazýváme **ryze racionální lomené funkce**. Všechny ostatní racionální lomené funkce nazveme **neryze racionální lomené funkce**.

Věta:

Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou dva polynomy, přičemž $Q(x) \neq 0$ je n -tého stupně. Potom

$$\exists! P_1(x) : P_2(x) = P(x) - P_1(x)Q(x) \quad (477)$$

kde $P_2(x)$ je buď nulový polynom, nebo polynom stupně nižšího než n .

Důkaz:

Nechť

$$\begin{aligned} Q(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n, \quad b_n \neq 0, \\ P(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m. \end{aligned} \quad (478)$$

Když $m < n$, musí být $P_1(x) = 0$, jinak by stupeň polynomu $P_2(x)$ musel být alespoň n .

Když $m > n$, musí být polynomy $P_1(x)$ a $P(x)$ stejného stupně aby jejich rozdíl mohl být stupně nižšího než n . Proto polynom $P_1(x)$ musí být stupně $m - n$. Tedy

$$P_1(x) = c_0 + c_1x + \cdots + a_{m-n}x^{m-n}. \quad (479)$$

Koeficienty c_i přitom musí vyhovovat podmínce aby se v polynomu

$$\begin{aligned} P_2(x) &= P(x) - P_1(x)Q(x) = \\ &= (a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m) - (c_0 + c_1x + \cdots + a_{m-n}x^{m-n})(b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n) \end{aligned} \quad (480)$$

rovnaly nule pro x^n, x^{n+1}, \dots, x^m .

To bude splněno právě když

$$\begin{aligned} a_m &= c_{m-n}b_n \\ a_{m-1} &= c_{m-n-1}b_n + c_{m-n}b_{n-1} \\ &\dots \end{aligned} \quad (481)$$

$$a_n = c_0b_n + c_1b_{n-1} + \cdots + c_{m-n}b_{n-(m-n)}$$

přičemž členy ve kterých vystupuje b_k s indexem $k < 0$ je třeba vynechat, neboli položíme $b_{-1} = b_{-2} = \dots = 0$.

Protože $b_n \neq 0$, z první rovnice plyne

$$c_{m-n} = \frac{a_m}{b_n}. \quad (482)$$

Potom z druhé rovnice dostáváme

$$c_{m-n} = \frac{a_{m-1} - c_{m-n} b_{n-1}}{b_n}, \quad (483)$$

atd. Z toho vyplývá, že všechny koeficienty c_i polynomu $P_1(x)$ jsou určeny jednoznačně, čímž je důkaz hotov.

Pozorování:

Rovnost (477) snadno přepíšeme do tvaru

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)} \quad (484)$$

což znamená, že každou racionální funkci lze zapsat jako součet polynomu a ryze racionální funkce:

Příklad 1:

Racionální lomenou funkci

$$\frac{2x^3 + 9x^2 + 23x + 17}{x^2 + 3x + 5} \quad (485)$$

upravíme dělením na tvar

$$\frac{2x^3 + 9x^2 + 23x + 17}{x^2 + 3x + 5} = 2x + 3 + \frac{4x + 2}{x^2 + 3x + 5} \quad (486)$$

Zlomek na pravé straně je tzv. **parciální zlomek**. Je zřejmé, že polynom ve jmenovateli parciálního zlomku má pár komplexně

sdužených kořenů a nelze jej tedy dále rozložit na elementární zlomky.

Věta:

Nechť $P(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ je polynom stupně nižšího než $Q(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$. Nechť dále $K = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\}$. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ je k -násobným ($k > 0$) kořenem polynomu $Q(x)$, tj.

$$\exists Q_1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) : (\forall x \in \mathbb{R} : Q(x) = (x - \alpha)^k Q_1(x) \wedge Q_1(x) \neq 0). \quad (487)$$

Potom existuje číslo $A \in \mathbb{R}$ a polynom $P_1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ který je buď nulový, nebo stupně nižšího, než polynom $(x - \alpha)^{k-1} Q_1(x)$, že

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus K : \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x - \alpha)^k} + \frac{P_1(x)}{(x - \alpha)^{k-1} Q_1(x)} \quad (488)$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus K : \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{P(x)}{(x - \alpha)^k Q_1(x)} = \frac{(P(x) - A Q_1(x)) + A Q_1(x)}{(x - \alpha)^k Q_1(x)} = \\ &= \frac{A}{(x - \alpha)^k} + \frac{P(x) - A Q_1(x)}{(x - \alpha)^k Q_1(x)}. \end{aligned} \quad (489)$$

Číslo A zvolíme tak, aby platilo

$$P(\alpha) - A Q_1(\alpha) = 0. \quad (490)$$

Jelikož $Q_1(\alpha) \neq 0$, stačí volit

$$A = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}. \quad (491)$$

Při této volbě A je

$$\alpha \in \ker(P(x) - AQ_1(x)). \quad (492)$$

Je-li $P(x) - AQ_1(x)$ nulový polynom, máme větu dokázanu.

V opačném případě pak

$$\exists P_1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) : P(x) - AQ_1(x) = (x - \alpha)P_1(x), \quad (493)$$

stupně nižšího, než polynom $P(x) - AQ_1(x)$.

Protože polynom $P(x) - AQ_1(x)$ je nižšího stupně než polynom

$$Q(x) = (x - \alpha)^k Q_1(x), \quad (494)$$

je polynom $P_1(x)$ nižšího stupně, než polynom $(x - \alpha)^{k-1} Q_1(x)$, nebo je to nulový polynom.

Důsledek:

Nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty. Potom

$$\begin{aligned} & \exists A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathbb{R}, P_k(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) < Q_1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) : \\ & : \left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus K : \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - \alpha)} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k} + \frac{P_k(x)}{Q_1(x)} \right). \end{aligned} \quad (495)$$

Důkaz:

Použijeme-li větu k -krát, postupně dostaneme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1} Q_1(x)}$$

$$\frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1} Q_1(x)} = \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-\alpha)^{k-1} Q_1(x)}$$

.....

$$\frac{P_{k-1}(x)}{(x-\alpha) Q_1(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{P_k(x)}{Q_1(x)}$$

Věta:

Nechť $P(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ je polynom stupně nižšího než $Q(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$. Nechť dále $K = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\}$. Nechť $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$ je k -násobným ($k > 0$) kořenem polynomu $Q(x)$.

Potom existují čísla $M, N \in \mathbb{R}$ a polynom $P_1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ který je buď nulový, nebo stupně nižšího, než polynom $(x^2 + px + q)^{k-1} Q_1(x)$, že

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus K : \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} Q_1(x)} \quad (497)$$

Důkaz:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus K : \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(P(x) - (Mx + N)Q_1(x)) + (Mx + N)Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^k Q_1(x)} =$$

$$= \frac{(Mx + N)}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{P(x) - (Mx + N)Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^k Q_1(x)}.$$

(498)

Čísla M, N zvolíme tak, aby platilo

$$P(\alpha) - A Q_1(\alpha) = 0. \quad (499)$$

Jelikož $Q_1(\alpha) \neq 0$, stačí volit

$$M\alpha + N = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} = \frac{P(a+ib)}{Q_1(a+ib)} = c + id = Ma + iMb + N. \quad (500)$$

Odtud plyne

$$M = \frac{d}{b}, \quad N = c - \frac{da}{b}. \quad (501)$$

Při této volbě M, N jsou

$$\alpha, \bar{\alpha} \in \ker(P(x) - (Mx + N)Q_1(x)). \quad (502)$$

Je-li $P(x) - (Mx + N)Q_1(x)$ nulový polynom, máme větu dokázánu. V opačném případě pak

$$\exists P_1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}): P(x) - (Mx + N)Q_1(x) = (x^2 + px + q)P_1(x). \quad (503)$$

stupně o dva nižšího než polynom $P(x) - (Mx + N)Q_1(x)$.

Protože polynom $P(x) - (Mx + N)Q_1(x)$ je nižšího stupně než polynom

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^k Q_1(x), \quad (504)$$

je polynom $P_1(x)$ nižšího stupně, než polynom $(x^2 + px + q)^{k-1} Q_1(x)$, nebo je to nulový polynom.

Důsledek:

Nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty. Potom

$$\begin{aligned} &\exists M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_k, N_k \in \mathbb{R}, P_k(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) < Q_1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}): \\ &: \left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus K : \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{M_kx + N_k}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{P_k(x)}{Q_1(x)} \right) \end{aligned} \quad (505)$$

Důkaz:

Použijeme-li větu k -krát, postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{M_kx + N_k}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} Q_1(x)} \\ \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} Q_1(x)} &= \frac{M_{k-1}x + N_{k-1}}{(x^2 + px + q)^{k-1}} + \frac{P_2(x)}{(x^2 + px + q)^{k-2} Q_1(x)} \\ &\dots \\ \frac{P_{k-1}(x)}{(x^2 + px + q) Q_1(x)} &= \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{P_k(x)}{Q_1(x)} \end{aligned} \quad (506)$$

Integrovaní obecných racionálních lomených funkcí

Uvažujme funkci

$$f(\mathbb{R} \setminus \{\alpha\} \rightarrow \mathbb{R}) = \frac{A}{(x - \alpha)^n}, n = \mathbb{N}^+. \quad (507)$$

Počítejme její integrál

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^n} dx = \int A(x-\alpha)^{-n} dx = \begin{cases} \frac{A}{1-n} \frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}}, & n \neq 1 \\ A \ln|x-\alpha|, & n = 1 \end{cases} \quad (508)$$

Uvažujme dále funkci

$$g(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}, n = \mathbb{N}^+. \quad (509)$$

Vypočteme

$$\frac{d}{dx}(x^2 + px + q) = 2x + p. \quad (510)$$

Z věty (477) plyne, že

$$\forall P(x) = Mx + N, Q(x) = 2x + p : \left(\exists k_1, k_2 \in \mathbb{R} : \frac{Mx + N}{2x + p} = k_1 + \frac{k_2}{2x + p} \right), \quad (511)$$

neboli

$$Mx + N = k_1(2x + p) + k_2. \quad (512)$$

Proto

$$\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} = k_1 \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} + k_2 \frac{1}{(x^2 + px + q)^n}. \quad (513)$$

Počítejme integrál prvního parciálního zlomku:

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx = \int \frac{1}{y^n} dy = \begin{cases} \frac{y^{1-n}}{1-n} = \frac{1}{1-n} \frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}, & n \neq 1 \\ \ln y = \ln(x^2+px+q), & n = 1 \end{cases}$$

$$y = x^2 + px + q = \varphi(x), \quad \frac{dy}{dx} = 2x + p = \varphi'(x), \quad dy = (2x + p) dx \quad (514)$$

Integrál druhého parciálního zlomku nejprve upravíme

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2+px+q)^n} dx &= \int \frac{1}{\left[\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \frac{4q-p^2}{4} \right]^n} dx = \\ &= \int \frac{\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}}{\left[\left(y \sqrt{\frac{4q-p^2}{4}} \right)^2 + \frac{4q-p^2}{4} \right]^n} dy = \frac{\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}}{\left(\frac{4q-p^2}{4} \right)^n} \int \frac{1}{(y^2+1)^n} dy = \\ &= \left(\frac{4q-p^2}{4} \right)^{\frac{1-2n}{2}} \int \frac{1}{(y^2+1)^n} dy \\ x = y \sqrt{\frac{4q-p^2}{4}} - \frac{p}{2} &= \varphi(y), \quad \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{4q-p^2}{4}} = \varphi'(y), \quad dx = \sqrt{\frac{4q-p^2}{4}} dy \end{aligned} \quad (515)$$

Zbývá tedy již jen vypočítat integrál

$$I_n = \int \frac{1}{(y^2+1)^n} dy. \quad (516)$$

K jeho výpočtu použijeme metodu per partes:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(y^2+1)^n} dy &= \frac{y}{(y^2+1)^n} + 2n \int \frac{y^2}{(y^2+1)^{n+1}} dy = \\
&= \frac{y}{(y^2+1)^n} + 2n \int \frac{(y^2+1)-1}{(y^2+1)^{n+1}} dy = \\
&= \frac{y}{(y^2+1)^n} + 2n \int \frac{1}{(y^2+1)^n} dy - 2n \int \frac{1}{(y^2+1)^{n+1}} dy \\
f' &= 1, \quad f = y, \quad g = \frac{1}{(y^2+1)^n}, \quad g' = \frac{-2ny}{(y^2+1)^{n+1}}
\end{aligned} \tag{517}$$

Což můžeme napsat jako

$$I_n = \frac{y}{(y^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}. \tag{518}$$

Odtud plyne rekurentní vyjádření

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{y}{2n(y^2+1)^n}. \tag{519}$$

Musíme tedy pouze určit I_1 . Metodou přímého invertování derivace okamžitě vidíme, že

$$I_1 = \int \frac{1}{y^2+1} dy = \arctan y. \tag{520}$$

Příklad 2:

Vypočtěme integrál racionální lomené funkce

$$\int \frac{x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 46x + 25}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27} dx \tag{521}$$

Řešení:

Danou racionální funkci zapíšeme jako součet polynomu a ryze racionální funkce:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 46x + 25}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27} dx &= \int x - 1 + \frac{8x - 2}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{8x - 2}{(x - 3)^3} dx = \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{A}{(x - 3)^3} + \frac{B}{(x - 3)^2} + \frac{C}{(x - 3)} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{22}{(x - 3)^3} + \frac{8}{(x - 3)^2} + \frac{0}{(x - 3)} dx = \frac{x^2}{2} - x - \frac{11}{(x - 3)^2} - \frac{8}{x - 3}. \end{aligned} \quad (522)$$

Příklad 3:

Vypočtěme integrál

$$\int \frac{6x + 3}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx \quad (523)$$

Řešení:

Protože polynom ve jmenovateli má komplexní kořeny, integrujeme vlastně parciální zlomek. Vypočteme tedy derivaci

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 4x + 13) = 2x + 4, \quad (524)$$

odkud

$$\frac{6x + 3}{2x + 4} = \frac{3(2x + 4) - 9}{2x + 4}, \quad (525)$$

neboli

$$6x + 3 = Mx + N = k_1(2x + p) + k_2 = 3(2x + 4) - 9. \quad (526)$$

Máme tedy

$$\begin{aligned} \int \frac{6x + 3}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx &= \int \frac{3(2x + 4) - 9}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx = \\ &= 3 \int \frac{2x + 4}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx - 9 \int \frac{1}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx \end{aligned} \quad (527)$$

Integrály na pravé straně budeme řešit substituční metodou:

$$\int \frac{2x + 4}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx = \int \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x^2 + 4x + 13}$$

$$y = x^2 + 4x + 13 \equiv \varphi(x), \quad \frac{dy}{dx} = 2x + 4 = \varphi'(x), \quad dy = (2x + 4) dx \quad (528)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx &= \int \frac{1}{[(x + 2)^2 + 9]^2} dx = \int \frac{3}{(9y^2 + 9)^2} dy = \\ &= \frac{1}{27} \int \frac{1}{(y^2 + 1)^2} dy = \frac{1}{27} \left[\frac{\arctan y}{2} + \frac{y}{2(y^2 + 1)} \right] = \\ &= \frac{1}{54} \left[\arctan \frac{x + 2}{3} + \frac{3(x + 2)}{(x + 2)^2 + 9} \right] \end{aligned}$$

$$x = 3y - 2 \equiv \varphi(y), \quad \frac{dx}{dy} = 3 \equiv \varphi'(y), \quad dx = 3dy, \quad y = \frac{x + 2}{3} \equiv \varphi^{-1}(x) \quad (529)$$

Konečný výsledek potom je

$$\int \frac{6x+3}{(x^2+4x+13)^2} dx = -\frac{3}{x^2+4x+13} - \frac{9}{54} \left[\arctan \frac{x+2}{3} + \frac{3(x+2)}{(x+2)^2+9} \right] \quad (530)$$

Příklad 4:

Vypočtěme integrál racionální lomené funkce

$$\int \frac{-3x^5 + 20x^4 - 45x^3 + 41x^2 - 8x - 8}{(x^3 - 4x^2 + 2x + 4)^2} dx \quad (531)$$

Řešení:

$$\begin{aligned} & \int \frac{-3x^5 + 20x^4 - 45x^3 + 41x^2 - 8x - 8}{(x^3 - 4x^2 + 2x + 4)^2} dx = \\ & \int \frac{-3x^5 + 20x^4 - 45x^3 + 41x^2 - 8x - 8}{(x-2)^2 (x^2 - 2x + 2)^2} dx = \quad (532) \\ & \int \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{Mx+N}{(x^2-2x+2)^2} + \frac{Ox+p}{x^2-2x+2} dx \end{aligned}$$

Integrand vynásobíme společným jmenovatelem a máme

$$\begin{aligned}
& A[x^2 - (2x-2)]^2 + B[x^2 - (2x-2)]^2(x-2) + (Mx+N)(x-2)^2 + \\
& + (Ox+p)(x^2-2x+2)(x-2)^2 = \\
& = A[x^4 - 2x^2(2x-2) + (2x-2)^2] + B[x^4 - 2x^2(2x-2) + (2x-2)^2](x-2) + \\
& + (Mx+N)(x^2-4x+4) + (Ox+p)(x^2-2x+2)(x^2-4x+4) = \\
& = A(x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4) + B(x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4)(x-2) + \\
& + (Mx+N)(x^2-4x+4) + (Ox+p)(x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 16x + 8) = \\
& = Ax^4 - 4Ax^3 + 8Ax^2 - 8Ax + 4A + Bx^5 - 6Bx^4 + 16Bx^3 - 24Bx^2 + 20Bx - 8B + \\
& + Mx^3 - 4Mx^2 + 4Mx + Nx^2 - 4Nx + 4N + Ox^5 - 6Ox^4 + 14Ox^3 - 16Ox^2 + 8Ox + \\
& + Px^4 - 6Px^3 + 14Px^2 - 16Px + 8P.
\end{aligned}$$

(533)

Z četností výskytu hledaných koeficientů v jednotlivých členech tohoto výrazu sestavíme matici \mathbf{K} , v níž jednotlivé sloupce plníme shora dolů sestupně podle klesající mocniny proměnné odpovídajícího členu. Koeficienty čitatele integrované racionální lomené funkce budou tvořit vektor \mathbf{v} pravých stran:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} & A & B & M & N & O & P \\ x^5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x^4 & 1 & -6 & 0 & 0 & -6 & 1 \\ x^3 & -4 & 16 & 1 & 0 & 14 & -6 \\ x^2 & 8 & -24 & -4 & 1 & -16 & 14 \\ x^1 & -8 & 20 & 4 & -4 & 8 & -16 \\ x^0 & 4 & -8 & 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 20 \\ -45 \\ 41 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} \quad (534)$$

Gaussovou eliminační metodou (GEM) odtud dostaneme



Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & -6 & 1 & | & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ -4 & 16 & 1 & 0 & 14 & -6 & | & -45 \\ 8 & -24 & -4 & 1 & -16 & 14 & | & 41 \\ -8 & 20 & 4 & -4 & 8 & -16 & | & -8 \\ 4 & -8 & 0 & 4 & 0 & 8 & | & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & -6 & 1 & | & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & -8 & 1 & 0 & -10 & -2 & | & 35 \\ 0 & 24 & -4 & 1 & 32 & -2 & | & -119 \\ 0 & -28 & 4 & -4 & -40 & 2 & | & 152 \\ 0 & 16 & 0 & 4 & 24 & -4 & | & -88 \end{pmatrix} \sim \\
\sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & -6 & 1 & | & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & | & 11 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 8 & 6 & | & -47 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -12 & -8 & | & 68 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 4 & | & -40 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & -6 & 1 & | & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & | & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & | & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 4 & | & -40 \end{pmatrix} \sim \\
\sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & -6 & 1 & | & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & | & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -8 & | & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 12 & | & -28 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & -6 & 1 & | & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & | & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & | & -4 \end{pmatrix} .$$

(535)

Odkud zpětným chodem GEM získáme hledané koeficienty

$$\begin{aligned}
P &= 1, \\
O &= -5, \\
N &= -1, \\
M &= 3, \\
B &= 2, \\
A &= 1.
\end{aligned}
\tag{536}$$

Máme tedy integrovat parciální zlomky

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} + \frac{3x-1}{(x^2-2x+2)^2} - \frac{5x-1}{x^2-2x+2} dx,
\tag{537}$$

což nám s použitím metod odvozených v této kapitole nebude činiti žádných potíží:

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} dx = -\frac{1}{x-2}
\tag{538}$$

$$\int \frac{2}{x-2} dx = 2 \ln|x-2|
\tag{539}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x-1}{x^2-2x+2} dx &= -\frac{5}{2} \int \frac{2x-\frac{2}{5}}{x^2-2x+2} dx = -\frac{5}{2} \int \frac{(2x-2)\left(2-\frac{2}{5}\right)}{x^2-2x+2} dx = \\
&= -\frac{5}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx - 4 \int \frac{1}{x^2-2x+2} dx = \\
&= -\frac{5}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx - 4 \int \frac{1}{(x-1)^2+1} dx = \\
&= -\frac{5}{2} \ln(x^2-2x+2) - 4 \arctan(x-1)
\end{aligned}
\tag{540}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x-1}{(x^2-2x+2)^2} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{2x-\frac{2}{3}}{(x^2-2x+2)^2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{(2x-2)\left(2-\frac{2}{3}\right)}{(x^2-2x+2)^2} dx = \\
&= \frac{3}{2} \int \frac{2x-2}{(x^2-2x+2)^2} dx + 2 \int \frac{1}{(x^2-2x+2)^2} dx = \\
&= \frac{3}{2} \int \frac{2x-2}{(x^2-2x+2)^2} dx + 2 \int \frac{1}{[(x-1)^2+1]^2} dx = \\
&= -\frac{3}{2} \frac{1}{x^2-2x+2} + 2 \left[\arctan(x-1) + \frac{x-1}{2[(x-1)^2+1]} \right] = \\
&= \frac{x-1}{x^2-2x+2} - \frac{3}{2(x^2-2x+2)} + \arctan(x-1) = \\
&= \frac{2x-5}{2(x^2-2x+2)} + \arctan(x-1)
\end{aligned}$$

(541)

Takže výsledkem je funkce

$$\begin{aligned}
&\int \frac{-3x^5 + 20x^4 - 45x^3 + 41x^2 - 8x - 8}{(x^3 - 4x^2 + 2x + 4)^2} dx = \\
&= \frac{1}{2-x} + 2 \ln|x-2| - \frac{5}{2} \ln(x^2-2x+2) + \frac{2x-5}{2(x^2-2x+2)} - 3 \arctan(x-1)
\end{aligned}$$

(542)

Celá řada speciálních substitucí aplikovaných na transcendentní funkce může rovněž vést na integrály racionálních lomených funkcí. Předvedme si opět několik jednoduchých ukázek:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(\sin^2 x) \cos x} dx &= \int \frac{\cos x}{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)} dx = \int \frac{1}{y^2 (1 - y^2)} dy = \\ &= \int \frac{1}{y^2} + \frac{1}{2(y+1)} - \frac{1}{2(y-1)} dy = -\frac{1}{y} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y+1}{y-1} \right| = \\ &= -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| \end{aligned}$$

$$y = \sin x \equiv \varphi(x), \quad \frac{dy}{dx} = \cos x \equiv \varphi'(x), \quad dy = \cos x dx$$

(543)

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x \cos x}{(\sin x - \cos x - 1)^2} dx &= \int \frac{\frac{2y}{1+y^2} \frac{1-y^2}{1+y^2}}{\left(\frac{2y}{1+y^2} - \frac{1-y^2}{1+y^2} \right)^2} \frac{2}{1+y^2} dy = \\ &= \int \frac{-y(y+1)}{(y-1)(y^2+1)} dy = \\ &= \int \frac{-1}{y-1} - \frac{1}{y^2+1} dy = \\ &= -\ln|y-1| - \arctan y = -\ln \left| \tan \frac{x}{2} - 1 \right| - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$y = \tan \frac{x}{2}, \quad x = 2 \arctan y \equiv \varphi(y), \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+y^2} \equiv \varphi'(y),$$

$$dx = \frac{1}{1+y^2} dy, \quad \sin x = \frac{2y}{1+y^2}, \quad \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}.$$

(544)

$$\begin{aligned}
\int \frac{3\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-1}} dx &= \int \frac{3y^3}{2y^3-y^4} 6y^5 dy = \int \frac{18y^5}{2-y} dy = \\
&= -18 \int \left(y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 8y + 16 + \frac{32}{y-2} \right) dt = \\
&= -18 \left(\frac{y^5}{5} + \frac{2y^4}{4} + \frac{4y^3}{3} + \frac{8y^2}{2} + 16y + 32 \ln|y-2| \right) = \\
&= -\frac{18}{5} \sqrt[6]{(x-1)^5} - 9 \sqrt[6]{(x-1)^4} - 24 \sqrt[6]{(x-1)^3} - \\
&\quad - 72 \sqrt[6]{(x-1)^2} - 288 \sqrt[6]{x-1} - 576 \ln|\sqrt[6]{x-1}-2|
\end{aligned}$$

$$y = \sqrt[6]{x-1}, \quad x = y^6 + 1, \quad \frac{dx}{dy} = 6y^5, \quad dx = 6y^5 dy$$

(545)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{-x^2+6x-8}}{(x-1)(2x-3)} dx &= \int \frac{\frac{2y}{1+y^2}}{\left(\frac{2(2+y^2)}{1+y^2}-1\right)\left(\frac{4(2+y^2)}{1+y^2}-3\right)} \frac{-4y}{(1+y^2)^2} dy = \\
&= \int \frac{-8y^2}{(1+y^2)(3+y^2)(5+y^2)} dy = \\
&= \int \frac{1}{1+y^2} - \frac{6}{3+y^2} + \frac{5}{5+y^2} dy = \\
&= \arctan y - \frac{6}{\sqrt{3}} \arctan \frac{y}{\sqrt{3}} + \sqrt{5} \arctan \frac{y}{\sqrt{5}} = \\
&= \arctan \frac{\sqrt{-x^2+6x-8}}{x-2} - \frac{6}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{-x^2+6x-8}}{\sqrt{3}(x-2)} + \\
&\quad + \sqrt{5} \arctan \frac{\sqrt{-x^2+6x-8}}{\sqrt{5}(x-2)}
\end{aligned}$$

$$y = \frac{\sqrt{-x^2+6x-8}}{x-2} = \varphi^{-1}(x), \quad y^2(x-2)^2 = (x-2)(4-x),$$

$$y^2(x-2) = 4-x, \quad x = \frac{2(2+y^2)}{1+y^2} \equiv \varphi(y), \quad \frac{dx}{dy} = \frac{-4y}{(1+y^2)^2} \equiv \varphi'(y),$$

$$dx = \frac{-4y}{(1+y^2)^2} dy, \quad \sqrt{-x^2+6x-8} = y \left(\frac{2(2+y^2)}{1+y^2} - 2 \right) = \frac{2y}{1+y^2}.$$

(546)

Jednoduché Fyzikální aplikace Leibnizova integrálu

Pohybové rovnice částice v konzervativním silovém poli

Z předchozích příkladů již víme, že fyzikální veličiny rychlost a zrychlení jsou definovány coby časové derivace dráhy

$$v = \frac{dr}{dt},$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}.$$
(547)

Ve fyzikálních aplikacích jsme nejčastěji postaveni před problémem, kdy známe tvar silového pole a tedy průběh jeho intenzity \mathbf{a} , přičemž máme nalézt rovnice popisující dráhu testovací částice v tomto poli.

Příklad 1:

Nalezneme pohybové rovnice hmotného bodu pohybujícího se v homogenním silovém poli o intenzitě $\mathbf{a} = (0, 0, -a)$, s počáteční rychlostí $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a z místa $\mathbf{r}_0 = (r_{01}, r_{02}, r_{03})$.

Řešení:

Dvojnásobnou integrací intenzity pole podle času získáme okamžitě parametrické vyjádření dráhy, čili hledané vektorové vyjádření pohybových rovnic testovací částice v daném poli:

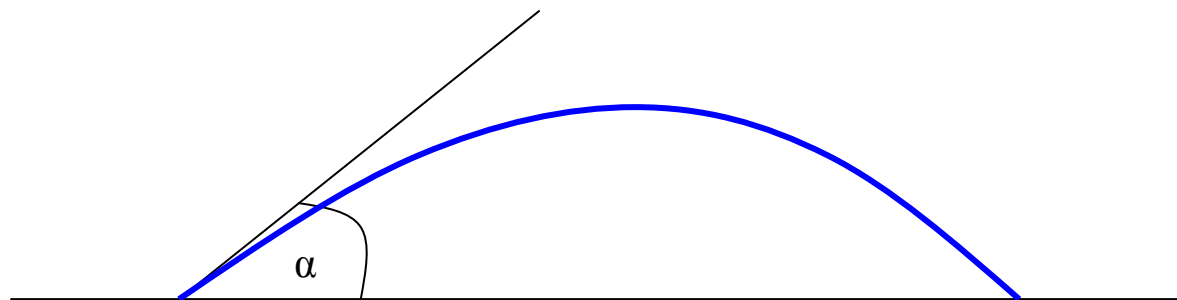
$$r_1 = \iint 0 dt^2 = \int v_1 dt = v_1 t + r_{01} = r_{01},$$

$$r_2 = \iint 0 dt^2 = \int v_2 dt = v_2 t + r_{02} = vt \cos \alpha + r_{02},$$

$$r_3 = \iint -a dt^2 = \int -at + v_3 dt = -\frac{at^2}{2} + v_3 t + r_{03} = -\frac{at^2}{2} + vt \sin \alpha + r_{03},$$
(548)

Povšimněme si, že po každé integraci nám vyskočí integrační konstanta s fyzikálním rozměrem odpovídajícím dané úrovni integrování (po první integraci intenzity jsme na úrovni rychlostí, po druhé integraci na úrovni poloh), která vyjadřuje počáteční podmínky úlohy (v daném případě počáteční rychlost a počáteční polohu v čase $t = 0$). Uvědomme si dále, že v homogenním silovém poli můžeme vždy s výhodou natočit souřadný systém, ve kterém počítáme tak, aby se nám jedna ze složek počáteční rychlosti anulovala, jak jsme to v našem příkladu učinili se složkou v_1 . Zbylé dvě komponenty počáteční rychlosti jsme nakonec vyjádřili pomocí velikosti celkové počáteční rychlosti v v polárním souřadném systému, kde úhel α nazýváme **elevačním úhlem**.

Obr. 19



Poruchové řešení pohybových rovnic částice v nekonzervativním silovém poli

Příklad 2:

Předchozí úlohu můžeme považovat za idealizovaný případ skutečných pohybů, mezi něž patří např. vrh šikmý vzhůru v gravitačním poli Země. Idealizace je přitom dvojího druhu: Zaprvé, reálné gravitační pole, jak na Zemi, tak i na kterémkoli jiném nebeském tělese, je vždy obecně nehomogenní a obvykle se blíží spíše centrálně symetrickému poli. Pokud se však zajímáme pouze o úsek dráhy mnohem kratší v porovnání s poloměrem křivosti gravitujícího tělesa, nedopouštíme se velké chyby, považujeme-li pole na takto krátkém úseku za homogenní.

Zadruhé, pokud zkoumáme pohyb testovacího tělesa v odporujícím prostředí planetární atmosféry, působí na těleso kromě samotného gravitačního pole ještě i odporová síla okolního prostředí, kterou jsme v předešlé úloze ignorovali. Tato síla přitom může ovlivnit výslednou dráhu reálného tělesa poměrně znatelně. Podívejme se tedy, jak se celá situace změní, budeme-li uvažovat rovněž i odpor plynného prostředí, jímž se testovací těleso pohybuje.

Řešení:

Složky odporové síly F jsou v případě turbulentního proudění dány Newtonovým vztahem

$$F_1 = \frac{CS\rho v_1^2}{2},$$

$$F_3 = \frac{CS\rho v_3^2}{2}.$$
(549)

Vzhledem k tomu, že můžeme souřadný systém vždy vhodně natočit tak, aby se nám jedna ze složek rychlosti anulovala, můžeme vždy zařídit, aby se např. druhá komponenta odporové síly stala nulovou a uvažovat tedy pouze první a třetí komponentu.

Povšimněme si nyní, že pro složky rychlosti, pomocí nichž vyjadřujeme tyto dvě složky odporové síly, platí:

$$v_1 = \frac{dr_1}{dt},$$

$$v_3 = \frac{dr_3}{dt}.$$
(550)

Tedy dráha kterou počítáme, je funkcí rychlosti, která je ale zpětně v každém bodě a v každém čase funkcí dráhy, jíž počítáme. Tento typ zpětné vazby vede k nelineárním diferenciálním rovnicím, které řešíme tzv. **poruchovou metodou**.

V nulté aproximaci zcela zanedbáme odpor prostředí a zapíšeme pohybové rovnice v konzervativním poli, jak jsme je našli v minulé úloze:

$$\begin{aligned} r_1 &= vt \cos \alpha, \\ r_3 &= -\frac{at^2}{2} + vt \sin \alpha, \end{aligned} \quad (551)$$

kde jsme nyní navíc položili počátek soustavy souřadné do polohového vektoru v čase $t = 0$ (počáteční poloha), čímž jsme jej rovněž anulovali.

V dalším kroku vypočteme složky rychlosti

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{dr_1}{dt} = v \cos \alpha, \\ v_3 &= \frac{dr_3}{dt} = v \sin \alpha - at. \end{aligned} \quad (552)$$

Odporová síla tvoří z fyzikálního hlediska tzv. **poruchu**, kterou je třeba přičíst k bezporuchovému řešení (551). Tato porucha bude podle 2. Newtonova zákona generovat zrychlení a'

$$\begin{aligned} a'_1 &= \frac{F_1}{m}, \\ a'_3 &= \frac{F_3}{m}, \end{aligned} \quad (553)$$

které bude působit proti směru pohybu a bude nám tedy krátit výslednou dráhu.

Jeho dvojnásobnou časovou integrací dostaneme

$$\begin{aligned} \iint -a'_1 dt^2 &= \int -\frac{F_1}{m} dt = -\frac{F_1 t^2}{2m}, \\ \iint -a'_3 dt^2 &= \int -\frac{F_3}{m} dt = -\frac{F_3 t^2}{2m}. \end{aligned} \quad (554)$$

Tyto záporné dráhové úseky tvoří poruchovou korekci prvního řádu, kterou nyní přičteme k bezporuchovému řešení (551):

$$r_1' = vt \cos \alpha - \frac{CS \rho v_1^2 t^2}{4m} = vt \cos \alpha - \frac{CS \rho v^2 t^2 \cos^2 \alpha}{4m}$$

$$r_3' = -\frac{at^2}{2} + vt \sin \alpha - \frac{CS \rho v_3^2 t^2}{4m} = -\frac{at^2}{2} + vt \sin \alpha - \frac{CS \rho t^2 (v \sin \alpha - at)^2}{4m}$$

(555)

Opakováním naznačeného postupu můžeme získat stále další a další členy poruchové řady, které reprezentují větší a větší zpřesnění řešeného problému. Spočtěme si ještě pro ukázkou poruchový člen druhého řádu:

$$v_1' = \frac{dr_1'}{dt} = v \cos \alpha - \frac{CS \rho v^2 t \cos^2 \alpha}{2m}$$

$$v_3' = \frac{dr_3'}{dt} = v \sin \alpha - at - \frac{CS \rho t (v^2 \sin^2 \alpha - 3vat \sin \alpha + 2a^2 t^2)}{2m}$$

(556)

Odkud

$$r_1'' = vt \cos \alpha - \frac{CS \rho v^2 t^2 \cos^2 \alpha}{4m} - \frac{CS \rho v_1'^2 t^2}{4m} =$$

$$= vt \cos \alpha - \frac{CS \rho v^2 t^2 \cos^2 \alpha}{4m} - \frac{CS \rho t^2 (2mv \cos \alpha - CS \rho v^2 t \cos^2 \alpha)}{16m^3}$$

$$r_3'' = -\frac{at^2}{2} + vt \sin \alpha - \frac{CS \rho t^2 (v \sin \alpha - at)^2}{4m} - \frac{CS \rho v_3'^2 t^2}{4m} =$$

$$= -\frac{at^2}{2} + vt \sin \alpha - \frac{CS \rho t^2 (v \sin \alpha - at)^2}{4m} -$$

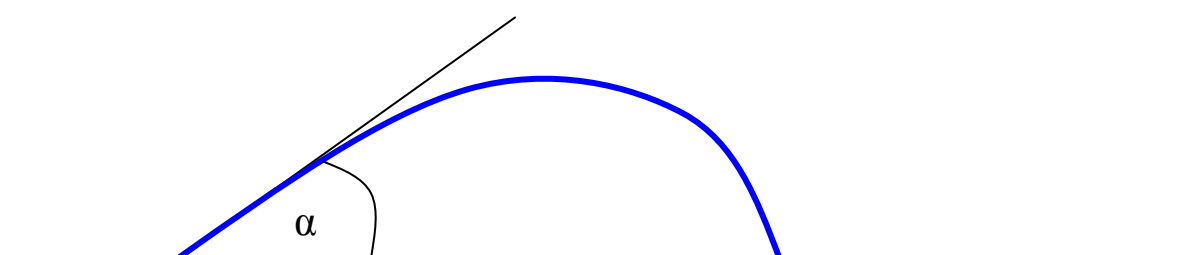
$$- \frac{CS \rho t^2 \left[2m(v \sin \alpha - at) - CS \rho t (v^2 \sin^2 \alpha - 3vat \sin \alpha + 2a^2 t^2) \right]^2}{16m^3}$$

(557)

Nelze si nevšimnout, že velikost členů vyššího řádu poruchového rozvoje velmi rychle klesá. Omezíme-li se tedy na několik prvních členů, získáme již velmi dobrou aproximaci reálné situace pro realistické vstupní parametry.

Již námi nalezený poruchový rozvoj druhého řádu dává pro vrh šikmý v homogenním zemském gravitačním poli a vzdušném prostředí při normálním tlaku a teplotě, reálné balistické křivky pro všechny běžné homogenní a kompaktní projektily nejrůznějších tvarů.

Obr. 20



Úvod do teorie lineárních diferenciálních rovnic

Získané poznatky o Leibnizově integrálu nyní využijeme pro řešení diferenciálních rovnic, tj. rovnic s neznámou skrytou v derivaci.

Podobně, jako je tomu při řešení integrálů, také řešením diferenciálních rovnic nejsou čísla, ale operátory zobrazení (funkce). Teorii diferenciálních rovnic si namísto přísně formálního přístupu vybudujeme s pomocí 13 příkladů, jež si v této kapitole postupně vyřešíme.

Rovnice 1 a 2 jsou jen přestrojenými integrály, rovnice 3 až 6 jsou diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými a zbytek budou lineární diferenciální rovnice prvního řádu. Diferenciálními rovnicemi vyšších řádů a soustavami diferenciálních rovnic se v této učebnici hlouběji zabývat nebudeme, řešení některých jednoduchých případů tohoto typu si přesto předvedeme v ukázkách aplikací v následující kapitole.

Příklad 1**Zadání:**

$$\begin{aligned}
 y''' = \sin x + \cos x; & \quad y(0) = 1 \\
 & \quad y'(0) = 0 \\
 & \quad y''(0) = 1
 \end{aligned}
 \tag{558}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
 y &= \iiint \sin x + \cos x \, dx^3 = \iint -\cos x + \sin x + a \, dx^2 = \\
 &= \int -\sin x - \cos x + bx + c \, dx = \underbrace{\cos x - \sin x + \frac{a \cdot x^2}{2} + bx + c}_{(559)}.
 \end{aligned}$$

Okrajové podmínky dávají:

$$\begin{aligned}
 -\cos 0 + \sin 0 + a &= 1 \Rightarrow \underline{\underline{a = 2}} \\
 -\sin 0 - \cos 0 + b &= 0 \Rightarrow \underline{\underline{b = 1}} \\
 \cos 0 - \sin 0 + c &= 1 \Rightarrow \underline{\underline{c = 0}}.
 \end{aligned}
 \tag{560}$$

Výsledek:

$$y = \cos x - \sin x + x^2 + x.
 \tag{561}$$

Příklad 2**Zadání:**

$$\begin{aligned}
 y'' = 12x; & \quad y(0) = 5 \\
 & \quad y'(0) = 2
 \end{aligned}
 \tag{562}$$

Řešení:

$$y = \iint 12x \, dx^2 = \int 6x^2 + a \, dx = 2x^3 + ax + b. \quad (563)$$

Z okrajových podmínek plyne

$$c = 2; \quad d = 5. \quad (564)$$

Výsledek:

$$y = 2x^3 + 2x + 5. \quad (565)$$

Příklad 3

Zadání:

$$\left. \begin{array}{l} y' = \frac{e^x}{3y^2} \\ y' = \sqrt{y} \end{array} \right\} y(0) = e \quad (566)$$

Řešení:

1)

$$\begin{aligned} 3y^2 \frac{dy}{dx} &= e^x \\ 3y^2 \, dy &= e^x \, dx \\ \int 3y^2 \, dy &= \int e^x \, dx \\ y^3 + a &= e^x + b \\ \underline{\underline{y}} &= \sqrt[3]{e^x + c}. \end{aligned} \quad (567)$$

Z okrajové podmínky plyne:

$$\sqrt[3]{1+c} = e \Rightarrow \underline{\underline{c = e^3 - 1}}. \quad (568)$$

Výsledek:

$$y = \sqrt[3]{e^x + e^3 - 1}. \quad (569)$$

2)

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx$$

$$\int y^{-1/2} dy = \int dx \quad (570)$$

$$2\sqrt{y} + a = x + b$$

$$\sqrt{y} = \frac{x}{2} + c$$

$$\underline{\underline{y = \frac{x^2}{4} + c}}$$

Z okrajové podmínky nyní plyne:

$$\underline{\underline{c = e}} \quad (571)$$

Takže máme výsledek:

$$y = \frac{x^2}{4} + e. \quad (572)$$

Příklad 4**Zadání:**

$$y' = x \quad (573)$$

Řešení:

$$y = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c. \quad (574)$$

Příklad 5**Zadání:**

$$y' = \frac{e^{x-y}}{1+e^x} \quad (575)$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{e^x}{e^y(1+e^x)} \\ e^y \, dy &= \frac{e^x}{1+e^x} \, dx \\ \int e^y \, dy &= \int \frac{e^x}{1+e^x} \, dx \quad (576) \\ e^y + a &= \ln |e^x + 1| + b \\ y \cdot \ln e &= \ln [\ln |e^x + 1| + c] \end{aligned}$$

Výsledek:

$$y = \ln(\ln |e^x + 1| + c). \quad (577)$$

Příklad 6**Zadání:**

$$y' = xy. \quad (578)$$

Řešení:

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = x$$

$$\frac{dy}{y} = x dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x dx \quad (579)$$

$$\ln|y| + a = \frac{x^2}{2} + b$$

$$y = e^{\frac{x^2}{2} + c} = \underline{\underline{e^c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}}}$$

Výsledek:

$$y = k \cdot \exp\left(\frac{x^2}{2}\right). \quad (580)$$

Příklad 7**Zadání:**

$$y' - 2xy = 2x^3. \quad (581)$$

Řešení:

Jedná se o **lineární diferenciální rovnici prvního řádu**, takže při hledání jejího řešení použijeme **metodu variace konstanty**.

1) Partikulární řešení:

$$y' - 2xy = 0$$

$$y' = 2xy$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 2x \quad (582)$$

$$\frac{dy}{y} = 2x dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$$

$$\ln|y| = x^2 + a \quad (583)$$

$$y = e^{x^2+a} = e^a \cdot e^{x^2}.$$

Výsledek:

$$y = c \cdot e^{x^2}. \quad (584)$$

2) Obecné řešení:

Toužíme-li nalézt obecné řešení rovnice (581), nebude již struktura c vystupovat jako konstanta, ale brž bude obecně funkcí proměnné x , tj. bude platit:

$$y = c(x) \cdot e^{x^2}. \quad (585)$$

Derivací rovnice (585) zjistíme, že

$$y' = c'(x) \cdot e^{x^2} + 2c(x) \cdot x \cdot e^{x^2}. \quad (586)$$

Dosazením řešení (586) do rovnice (581) obdržíme

$$c'(x) \cdot e^{x^2} + c(x) \left[2xe^{x^2} - 2xe^{x^2} \right] = 2x^3. \quad (587)$$

Vidíme, že metoda nám anulovala výraz v závorce.

Lze snadno dokázat (ponechávám jako jednoduché domácí cvičení), že metoda tak činí zcela obecně, nikoliv pouze v tomto konkrétním případě. Máme tak

$$c'(x) \cdot e^{x^2} = 2x^3, \quad (588)$$

čili

$$c(x) = 2 \int \frac{x^3}{e^{x^2}} dx. \quad (589)$$

Substitucí $y = x^2$ nejprve integrál (589) upravíme na tvar

$$c(x) = \int y \cdot e^{-y} dy, \quad (590)$$

a ten dopočítáme per partes:

$$\int y \cdot e^{-y} dy = -y \cdot e^{-y} - \int -e^{-y} dy = \underline{\underline{-e^{-y}(y+1) + c}}, \quad (591)$$

kde jsme volili

$$f' = e^{-y}; \quad g = y. \quad (592)$$

Po konečném odsubstituování tedy máme

$$\underline{\underline{c(x) = -e^{-x^2}(x^2 + 1)}}. \quad (593)$$

Dosazením tohoto řešení do formule (584) obdržíme obecné řešení rovnice (581):

$$y = \left[(-x^2 - 1) \cdot e^{-x^2} + C \right] \cdot e^{x^2}, \quad (594)$$

neboli

$$y = C \cdot e^{x^2} - x^2 - 1. \quad (595)$$

Poznámka: na tomto příkladu jsme podrobně demonstrovali princip metody variace konstant.

V dalších příkladech již proto můžeme postupovat trochu rychleji.

Příklad 8

Zadání:

$$(1 + x^2) \cdot y' - 2xy = (1 + x^2)^2. \quad (596)$$

Řešení:

Rovnici nejprve upravíme na tvar

$$y' + y \cdot p(x) = q(x) \quad (597)$$

(lineární diferenciální rovnice prvního řádu):

$$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2 \quad (598)$$

Nalezneme partikulární řešení:

$$y' = \frac{2xy}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2x}{1+x^2} dx \quad (599)$$

$$\ln|y| + a = \ln|1+x^2| + b$$

$$y = e^c \cdot (1+x^2)$$

Partikulární řešení:

$$y = c \cdot (1+x^2). \quad (600)$$

Poznámka: prohlédneme-li si ještě jednou sekvenci kroků (599), jimiž jsme dospěli k partikulárnímu řešení (600), snadno dospějeme k závěru, že partikulární řešení je obecně dáno jednoduchou formulí

$$y = e^{-\int p(x) dx}. \quad (601)$$

Dle modelového příkladu 7 nyní hledáme obecné řešení, pro které, jak víme, platí:

$$c'(x) \cdot (1+x^2) = (1+x^2), \quad (602)$$

čili

$$c'(x) = 1. \quad (603)$$

Odtud

$$c(x) = \int dx = \underline{\underline{x+C}} \quad (604)$$

Dosazením tohoto výsledku za konstantu c do partikulárního řešení nalézáme

Obecné řešení:

$$y = (x + C) \cdot (1 + x^2). \quad (605)$$

Nyní je na čase, abychom si odvodili jednoduchý recept, jenž vznikne prostým smrsknutím všech kroků výše popsané metody do jediné formulky, která chrlí řešení **lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu** rovnou. Tento vzorec zní:

$$y = \frac{1}{e^{\int p(x) dx}} \left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + k \right]. \quad (606)$$

Jelikož $e^{-\int p(x) dx}$ není nic jiného, než naše staré dobré partikulární řešení (601), plyne odtud dosazením z (598) a (600) do vzorce (606):

$$\begin{aligned} y &= c \cdot (1 + x^2) \cdot \left[\frac{1}{c} \cdot \int \frac{1 + x^2}{1 + x^2} dx + k \right] = (1 + x^2) \cdot \int dx + k \cdot c \cdot (1 + x^2) = \\ &= \underline{\underline{(1 + x^2)(x + C)}}. \end{aligned} \quad (607)$$

To již vypadá stejně jednoduše, jako recept na omeletu – není-li pravda. Tak jej ihned vyzkoušejme na dalším příkladu:

Příklad 9

Zadání:

$$y' + 3x^2 \cdot y = x^2; \quad y(0) = 2. \quad (608)$$

Partikulární řešení:

$$y = e^{-3 \int x^2 dx} = c \cdot e^{-x^3}. \quad (609)$$

Obecné řešení:

$$\begin{aligned} y &= c \cdot e^{-x^3} \cdot \left[\frac{1}{c} \int x^2 \cdot e^{x^3} dx + k \right] = e^{-x^3} \cdot \int x^2 \cdot e^{x^3} dx + k \cdot c \cdot e^{-x^3} = \\ &= \underline{\underline{C \cdot e^{-x^3} + \frac{1}{3}}}. \end{aligned} \quad (610)$$

Poznámka: integrál jsme vypočetli substitucí $t = x^3$, která postupně dává:

$$\frac{dt}{dx} = 3x^2, \quad (611)$$

$$dt = 3x^2 dx,$$

tj.

$$\int x^2 \cdot e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^t dt = \frac{e^t}{3} + c = \underline{\underline{\frac{e^{x^3}}{3} + c}}. \quad (612)$$

Z okrajové podmínky pak plyne:

$$C + \frac{1}{3} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{C = \frac{5}{3}}}, \quad (613)$$

odkud máme konečný výsledek:

$$y = \frac{1}{3} (5e^{-x^3} + 1). \quad (614)$$

Příklad 10**Zadání:**

$$y' + y = \sin x. \quad (615)$$

Partikulární řešení:

$$y = e^{-\int dx} = \underline{\underline{c \cdot e^{-x}}} \quad (616)$$

Obecné řešení:

$$\begin{aligned} y &= c \cdot e^{-x} \cdot \left[\int \frac{e^x}{c} \cdot \sin x \, dx + k \right] = e^{-x} \cdot \int \sin x \cdot e^x \, dx + k \cdot c \cdot e^{-x} = \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + C \cdot e^{-x}}} \end{aligned} \quad (617)$$

Poznámka:

Integrál jsme počítali per partes, ve dvou krocích s výsledným zacyklením:

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

,

$$(618)$$

odkud

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x), \quad (619)$$

čili

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x). \quad (620)$$

Okrajová podmínka dává

$$-\frac{1}{2} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2}. \quad (621)$$

Výsledek:

$$y = \frac{1}{2} (\sin x - \cos x + e^{-x}). \quad (622)$$

Příklad 11

Zadání:

Na intervalu $(0; \infty)$ vypočtěte

$$y' + 3x^{-1} \cdot y = 2x^{-3}; \quad y(1) = 1. \quad (623)$$

Partikulární řešení:

$$y = e^{-3 \int \frac{1}{x} dx} = e^{-3 \ln|x|} = \left| \frac{c}{x^3} \right|. \quad (624)$$

Protože se příklad řeší pouze na intervalu $(0; \infty)$, nebude hrát absolutní hodnota žádnou roli, takže ji v dalším řešení již nemusíme psát.

Obecné řešení:

$$y = \frac{c}{x^3} \cdot \left[\frac{2}{c} \int x^3 \cdot x^{-3} dx + k \right] = \frac{2}{x^3} \cdot \int dx + \frac{c \cdot k}{x^3} = \frac{1}{x^3} \cdot (2x + C) = \underline{\underline{2x^{-2} + Cx^{-3}}} \quad (625)$$

Okrajová podmínka:

$$2 + C = 1 \Rightarrow \underline{\underline{C = -1}}. \quad (626)$$

Výsledek:

$$y = 2x^{-2} - x^{-3}. \quad (627)$$

Příklad 12

Zadání:

$$y' - 2x^{-1} \cdot y = 2x^3. \quad (628)$$

Partikulární řešení:

$$y = e^{2 \int \frac{1}{x} dx} = e^{2 \cdot \ln|x|} = c \cdot x^2. \quad (629)$$

Obecné řešení:

$$y = c \cdot x^2 \cdot \left[\frac{2}{c} \int x^{-2} \cdot x^3 dx + k \right] = 2 \cdot x^2 \cdot \int x dx + c \cdot k \cdot x^2 = \underline{\underline{x^4 + Cx^2}}. \quad (630)$$

Příklad 13**Zadání:**

Na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ vypočtěte:

$$y' - y \cdot \tan x = x \cdot \cos x. \quad (631)$$

Partikulární řešení:

$$y = e^{-\int \tan x \, dx} = e^{\ln|\cos x| + a} = c \cdot |\cos x| \quad (632)$$

Absolutní hodnota opět nehraje roli, z podobných důvodů jako v příkladu 11 (kosínus je na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ všude kladný).

Obecné řešení:

$$y = c \cdot \cos x \cdot \left[\frac{1}{c} \int \frac{1}{\cos x} \cdot x \cdot \cos x \, dx + k \right] = \cos x \cdot \int x \, dx + c \cdot k \cdot \cos x =$$

$$\underline{\underline{= \frac{x^2}{2} \cos x + C \cdot \cos x.}}$$

(633)

Jednoduché příklady použití lineárních diferenciálních rovnic

Příklad 1 - Chladnutí čaje

Za jak dlouho se čaj ohřátý na 100°C ochladí na 25°C, jestliže se na 60°C ochladí za 10 minut?

Předpokládejme, že teplota okolního vzduchu je konstantní a rovna 0°C, a že rychlost ochlazování je přímo úměrná rozdílu teplot čaje a okolí.

Řešení:

Slovní úloha zjevně vede na diferenciální rovnici

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\lambda T(t), \quad (634)$$

kde funkce $T(t)$ je přímo rovna rozdílu teploty čaje a okolí, vzhledem k tomu, že do teploty okolí vkládáme počátek soustavy souřadné, ve které počítáme. Integrací této rovnice

$$\int \frac{dT(t)}{T(t)} = -\lambda \int dt \quad (635)$$

dostáváme řešení

$$\ln T(t) - \ln T_0 = -\lambda t + t_0 \quad (636)$$

neboli

$$T(t) = T_0 \exp(-\lambda t) \quad (637)$$

kde konstanty s indexem 0 mají význam počátečních podmínek.

Dosazením odpovídajících hodnot nejprve vypočteme parametr λ :

$$\begin{aligned}
 60 &= 100e^{-10\lambda}, \\
 \ln 60 &= \ln 100 - 10\lambda, \\
 \lambda &= \frac{\ln 100 - \ln 60}{10} \approx 0,05.
 \end{aligned}
 \tag{638}$$

A nyní již určíme hledanou dobu chladnutí čaje

$$\begin{aligned}
 25 &\approx 100e^{-0.05t} \\
 \ln 25 &\approx \ln 100 - 0.05t \\
 t &\approx \frac{\ln 100 - \ln 25}{0.05} \approx 27 \text{ min}
 \end{aligned}
 \tag{639}$$

Příklad 2 - Lineární harmonický oscilátor

Jeho pohyb je určen rovnicí

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \omega^2\psi = 0,
 \tag{640}$$

což je **lineární diferenciální rovnice druhého řádu**. Protože zřejmě platí

$$\psi \cdot \frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \psi^2 \right) \cdot 1
 \tag{641}$$

a odtud rovněž

$$\frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right] \cdot 1,
 \tag{642}$$

můžeme rovnici (640) rozšířit funkcí $\frac{d\psi}{dt}$:

$$\frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2} + \omega^2 \cdot \frac{d\psi}{dt} \cdot \psi = \frac{d\psi}{dt} \left(\frac{d^2\psi}{dt^2} + \omega^2 \cdot \psi \right) = 0 \quad (643)$$

a poté vyjádřit ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \psi^2 \right] = 0 . \quad (644)$$

To však znamená, že

$$\left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \omega^2 \cdot \psi^2 = konst. \quad (645)$$

Označíme-li

$$konst. = (k \cdot \omega)^2 , \quad (646)$$

získáme rovnici

$$\left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 = \omega^2 (k^2 - \psi^2) , \quad (647)$$

z níž již separací proměnných plyne výraz

$$\frac{d\psi}{\sqrt{k^2 - \psi^2}} = \omega dt \quad (648)$$

připravený k integrování.

Máme tedy integrální rovnici

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{k^2 - \psi^2}} = \int \omega dt . \quad (649)$$

Zavedeme substituci

$$\psi = k \cdot \sin x \quad (650)$$

a odtud

$$\frac{d\psi}{dt} = k \cdot \cos x \Rightarrow d\psi = k \cdot \cos x \cdot dx . \quad (651)$$

Vyintegrujeme nejprve levou stranu rovnice (649):

$$\begin{aligned} \int \frac{d\psi}{\sqrt{k^2 - \psi^2}} &= \int \frac{k \cdot \cos x}{\sqrt{k^2 - k^2 \cdot \sin^2 x}} dx = \int \frac{k \cdot \cos x}{k \cdot \sqrt{1 - \sin^2 x}} dx = \\ &= \int \frac{\cos x}{|\cos x|} dx = \int dx \end{aligned} \quad (652)$$

Porovnáním tohoto výsledku s pravou stranou rovnice (649) dostaneme

$$dx = \omega dt , \quad (653)$$

což po integraci dá konečný výsledek

$$x = \omega t + \alpha . \quad (654)$$

Dosazením do substituční rovnice (650) nyní nalézáme obecné řešení rovnice (640) ve tvaru

$$\psi = k \cdot \sin(\omega t + \alpha) . \quad (655)$$

Příklad 3 - Radioaktivní rozpad jader

Položme si nyní otázku, jak se bude měnit **aktivita A** radionuklidového zářiče v průběhu času. V čase t_0 bude zářič obsahovat N_0 nestabilních jader. Časová změna počtu těchto

nestabilních jader bude zjevně přímo úměrná tomuto počtu (čím více nestabilních jader zářič obsahuje, tím víc se jich za jednotku času rozpadne), což zapíšeme

$$A = \frac{dN}{dt} = -\lambda N, \quad (656)$$

kde znaménko minus na pravé straně rovnice zohledňuje, že počet nestabilních jader s časem klesá. Konstanta úměrnosti λ charakterizuje rychlost, s jakou tento počet klesá, tj. jak silně radionuklid v daném okamžiku září. Diferenciální rovnici (656) snadno vyřešíme metodou separace proměnných:

$$\int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt, \quad (657)$$

což po integraci dává

$$\ln N - \ln N_0 = -\lambda t + t_0, \quad (658)$$

kde integrační konstanta t_0 odpovídá času, do kterého klademe počet nestabilních jader roven N_0 . Definitivně tedy můžeme položit $t_0 = 0$. Po úpravě odtud dostáváme

$$N = N_0 \exp(-\lambda t), \quad (659)$$

což je známý **rozpadový zákon**.

Rozpadová konstanta λ je základní charakteristikou specifikující vlastnosti každého radionuklidu. Položme si nyní otázku, v jakém čase poklesne aktivita daného radionuklidového zářiče přesně na polovinu. Z (659) plyne okamžitě odpověď v podobě exponenciální rovnice

$$1 = 2 \exp(-\lambda T_{1/2}), \quad (660)$$

což po zlogaritmování dává

$$0 = \ln 2 - \lambda T_{1/2}, \quad (661)$$

čili

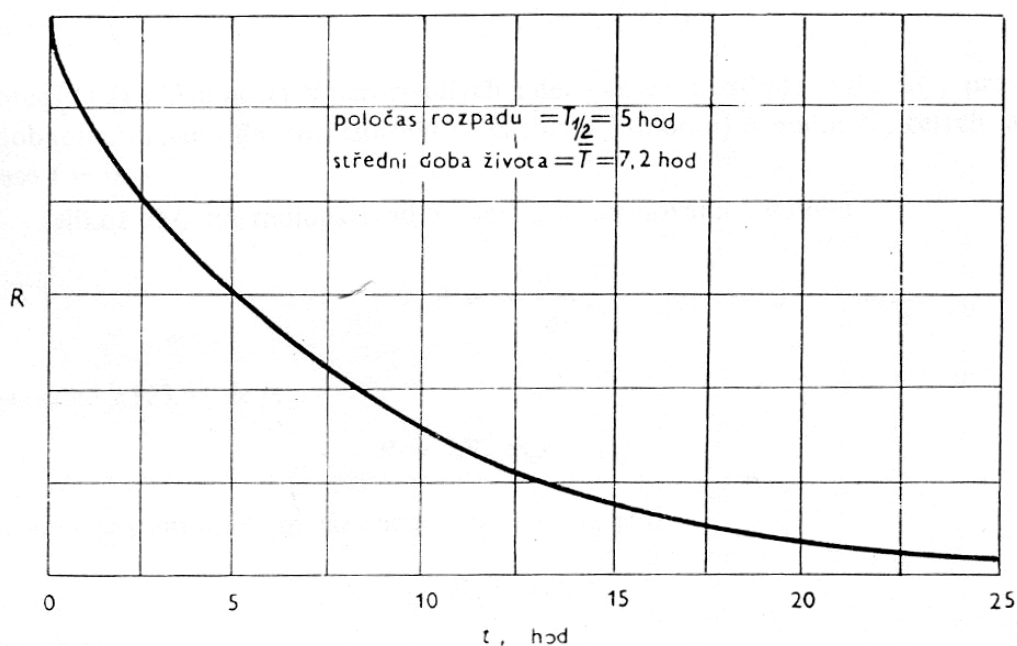
$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (662)$$

Konstantě $T_{1/2}$ odvozené z rozpadové konstanty λ vztahem (662), říkáme **poločas rozpadu** radionuklidu a je to další význačná charakteristika radionuklidvého zářiče.

Přepíšeme-li rozpadový zákon (659) s použitím poločasu rozpadu namísto rozpadové konstanty, obdržíme jeho alternativní vyjádření:

$$N = N_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}. \quad (663)$$

Obr. 21



Aktivita radioizotopu klesá exponenciálně s časem.

V praxi je však celá situace obvykle komplikována tím, že použitý radionuklid je členem nějaké rozpadové řady. Rozeberme si nyní alespoň nejjednodušší případ radionuklidu R_1 , jehož rozpadem vzniká radionuklid R_2 , který se dále rozpadá na již stabilní nuklid. Potom

pravděpodobné počty jader obou nuklidů $N_1(t)$ a $N_2(t)$ budou vyhovovat **systemu diferenciálních rovnic**

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= -\lambda_1 N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} &= \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2,\end{aligned}\tag{ 664 }$$

První rovnice systému se týká jednoho výchozího nuklidu R_1 a je shodná s výše diskutovaným případem. V druhé rovnici udává první člen na pravé straně přírůstek radionuklidu R_2 vznikajícího rozpadem nuklidu R_1 a druhý člen úbytek jader nuklidu R_2 způsobený jeho rozpadem. Známé řešení první rovnice

$$N_1(t) = N_1(0) \exp(-\lambda_1 t)\tag{ 665 }$$

dosadíme do druhé

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_1(0) \exp(-\lambda_1 t),\tag{ 666 }$$

což je **nehomogenní diferenciální rovnice prvního řádu**. Položíme

$$N_2(t) = f(t) \exp(-\lambda_2 t).\tag{ 667 }$$

Zřejmě musí platit $f(0) = N_2(0)$. Po dosazení za $N_2(t)$ do nehomogenní rovnice dostaneme jednoduchou rovnici pro $f(t)$, jejímž řešením je

$$f(t) = N_2(0) + \frac{\lambda_1 N_1(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} - 1 \right],\tag{ 668 }$$

takže

$$N_2(t) = N_2(0) + \frac{\lambda_1 N_1(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (669)$$

Pro $N_2(0) = 0$ dosáhne pravděpodobný počet jader R_2 maximální hodnoty v čase t_m , který je dán podmínkou $\frac{dN_2}{dt} = 0$. Z uvedených vztahů nalezneme

$$t_m = \frac{\ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (670)$$

Z druhé rovnice (664) plyne, že v čase t_m bude

$$\lambda_1 N_1(t_m) = \lambda_2 N_2(t_m), \quad (671)$$

a proto aktivity nuklidů R_1 a R_2 jsou v čase t_m stejné.

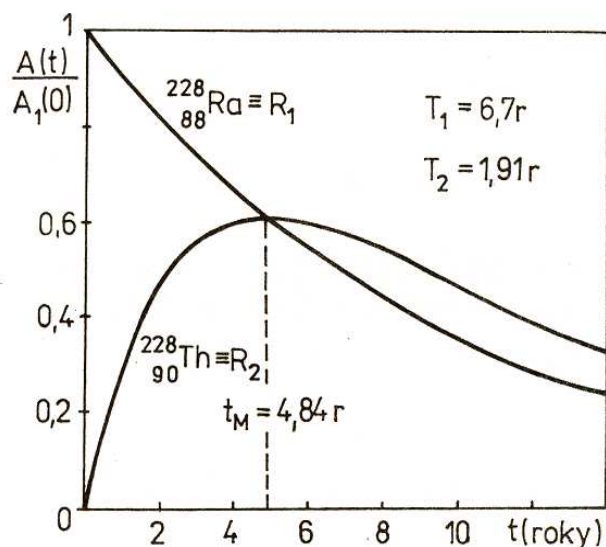
Prozkoumejme ještě, k jakým modifikacím rozpadového zákona (659) rovnice (669) s výchozím počtem jader $N_2(0) = 0$ vede. Předpokládejme nejprve, že $\lambda_1 > \lambda_2$, a zapišme rovnici (669) s pomocí aktivit

$$A_2(t) = A_1(0) \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} [1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t}] e^{-\lambda_2 t}. \quad (672)$$

Pro $t \geq \frac{5}{\lambda_1 - \lambda_2}$ je exponenciála v hranaté závorce prakticky

zanedbatelná vůči jedničce a časový vývoj aktivity se bude řídit prostým exponenciálním zákonem (659) s rozpadovou konstantou λ_2 (viz obr. 22)

Obr. 22



Závislost relativní aktivity radionuklidů $R_1 = {}^{228}_{88}\text{Ra}$ a $R_2 = {}^{228}_{90}\text{Th}$ na čase. $T_1 > T_2$, a proto $\lambda_1 < \lambda_2$.

Pro $\lambda_1 < \lambda_2$ upravíme (669) na tvar

$$A_2(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t} \right] A_1(t). \quad (673)$$

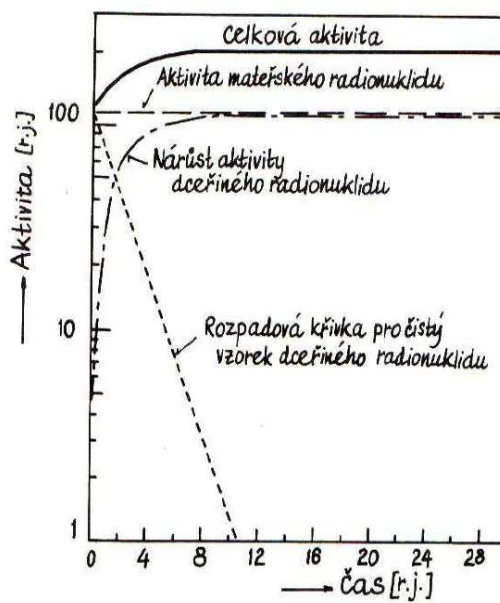
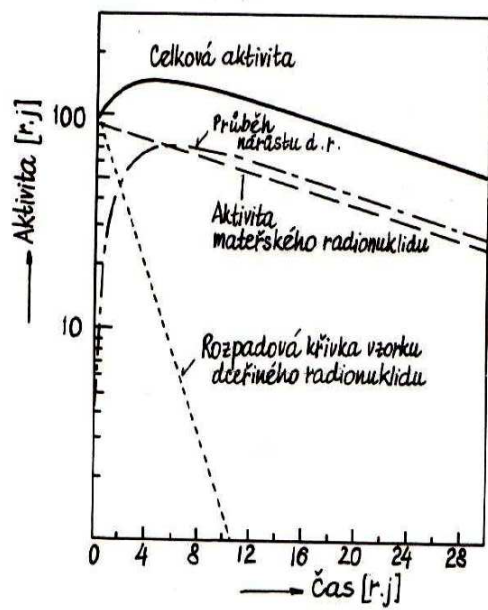
Pro časy $t \geq \frac{5}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{5t_m}{\ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ se bude $A_2(t)$ lišit od $A_1(t)$ pouze o

multiplikační konstantu a budeme proto mít pro $A_2(t)$ exponenciální zákon (659) s rozpadovou konstantou λ_1 .

Odtud je již patrné, jak bychom postupovali v případech, kdy máme radioaktivní řadu obsahující více radionuklidů.

Následující dva obrázky ukazují průběh rozpadové křivky pro $\lambda_1 < \lambda_2$ a pro $\lambda_1 \ll \lambda_2$.

Obr. 23



Úvod do teorie Riemannova integrálu



Bernhard Riemann (1826-1866)

Příklad 1:

Urči, která funkce vytvoří s úsečkami $y = 0$, x , útvar o obsahu

$$S = \frac{x^3}{3}. \quad (674)$$

Řešení:

Změní-li se x na $x + dx$, změní se S na $S + ydx$ a dále platí

$$S + ydx = \frac{1}{3}(x + dx)^3 = \frac{1}{3}x^3 + x^2dx + xdx^2 + \frac{dx^3}{3}. \quad (675)$$

Odtud

$$y = \frac{x^3}{3dx} + x^2 + xdx + \frac{dx^2}{3} - \frac{S}{dx} = x^2 + xdx + \frac{dx^2}{3}. \quad (676)$$

Protože $dx \rightarrow 0$, můžeme jej zanedbat a dostáváme hledanou funkci

$$y = x^2. \quad (677)$$

Obecný postup nalezení obsahu množiny určené grafem funkce f je tedy následující:

- 1) Vezmeme nekonečně malý úsek délky dx na ose x .
- 2) Obsah nekonečně úzkého obdélníku šířky dx a délky $f(x)$ pak bude $f(x)dx$.
- 3) Zbývá sčítat nekonečně mnoho takovýchto nekonečně malých obsahů.

Vzniklý součet provedený na intervalu $\langle a, b \rangle$ nazýváme **Riemannovým integrálem na intervalu $\langle a, b \rangle$** a značíme

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (678)$$

Čtenář jistě nemohl přehlédnout zjevnou souvislost mezi nalezeným obsahem plochy vymezené funkcí $f(x)$ a osou x s výsledkem Leibnizovské integrace téže funkce:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}. \quad (679)$$

Tato souvislost vskutku platí zcela obecně a přesně ji vyjadřuje následující věta.

Hlavní Riemannova věta

Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Necht' dále

$$\exists F \in \langle a, b \rangle : (\forall x \in (a, b) : F'(x) = f(x)). \quad (680)$$

Potom existuje číslo

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (681)$$

takové, že

$$\sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}), \quad (682)$$

kde m_i resp. M_i je minimum, resp. maximum funkce f na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$.

Důkaz:

Máme dokázat, že

$$\sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \leq F(b) - F(a) \leq \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}). \quad (683)$$

Za tímto účelem vyjádříme výraz $F(b) - F(a)$ jako řadu

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) = \\ &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \dots \\ &\dots + F(x_2) - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) = \\ &= \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})]. \end{aligned} \quad (684)$$

čímž dostáváme nerovnost

$$\sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \leq \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}). \quad (685)$$

Stačí tedy jen dokázat, že

$$m_i (x_i - x_{i-1}) \leq F(x_i) - F(x_{i-1}) \leq M_i (x_i - x_{i-1}). \quad (686)$$

To je však snadné, neboť podle Lagrangeovy věty

$$\begin{aligned} \exists \xi_i \in (x_{i-1}, x_i) \subset (a, b): F(x_i) - F(x_{i-1}) &= F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \end{aligned} \quad (687)$$

Krom toho

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i, \quad (688)$$

a proto

$$m_i (x_i - x_{i-1}) \leq f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i (x_i - x_{i-1}), \quad (689)$$

neboli

$$m_i (x_i - x_{i-1}) \leq F(x_i) - F(x_{i-1}) \leq M_i (x_i - x_{i-1}). \quad (690)$$

Sečteme-li tyto nerovnosti, dostáváme konečný důkaz, že

$$\sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \leq \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}), \quad (691)$$

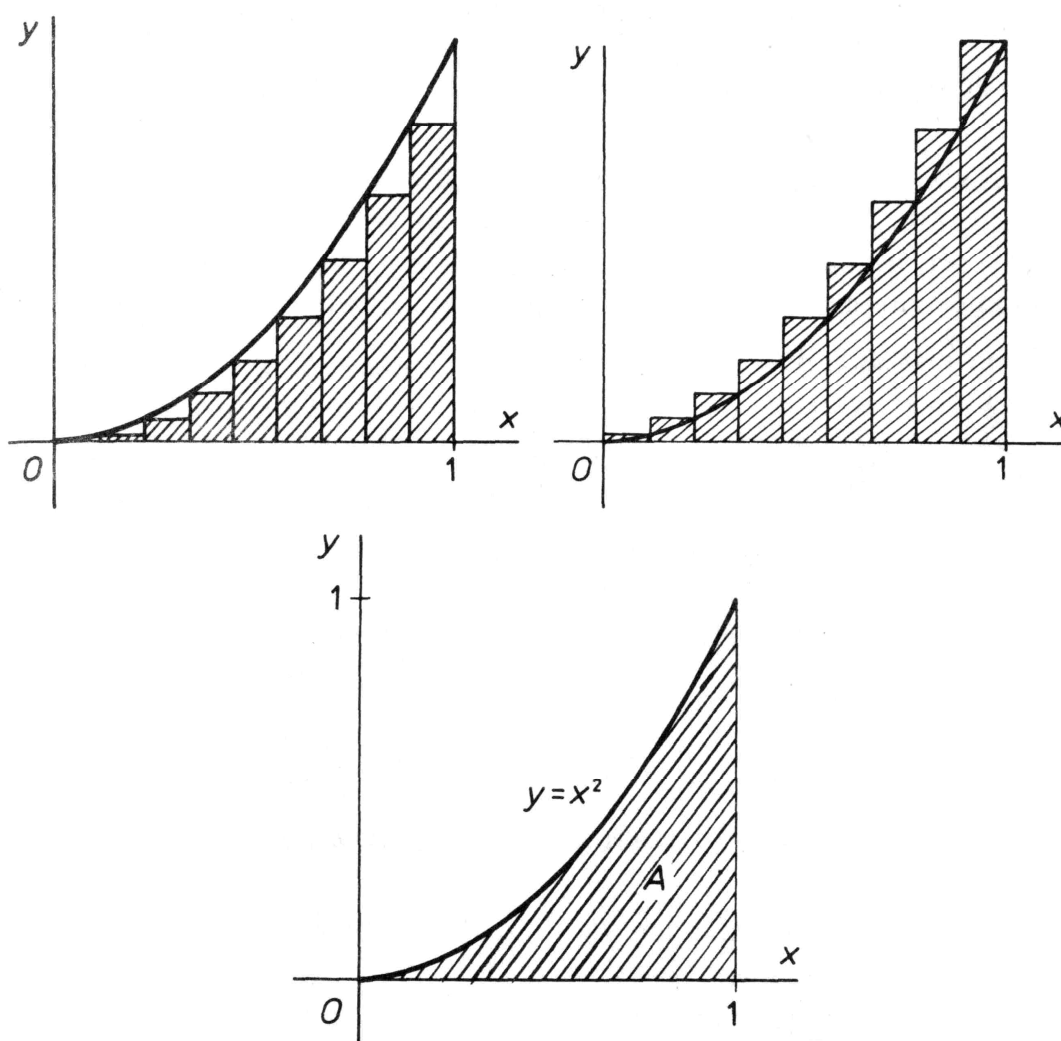
což je ovšem totéž, jako

$$\sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \leq F(b) - F(a) \leq \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}), \quad (692)$$

čili

$$\sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}). \quad (693)$$

Obr. 24



Věta o aditivitě Riemannova integrálu

Nechť f, g jsou funkce spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$, $c, d \in \mathbb{R}$. Potom

$$\int_a^b (cf(x) + dg(x)) dx = c \int_a^b f(x) dx + d \int_a^b g(x) dx. \quad (694)$$

Důkaz:

Nechť funkce F, G jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, a necht'

$$\forall x \in (a, b): F'(x) = f(x), G'(x) = g(x). \quad (695)$$

Potom i funkce

$$H(x) = cF(x) + dG(x) \quad (696)$$

je dle věty o spojitosti součtu spojitá na $\langle a, b \rangle$ a platí:

$$H'(x) = (cF(x) + dG(x))' = cF'(x) + dG'(x) = cf(x) + dg(x). \quad (697)$$

Proto

$$\begin{aligned} \int_a^b (cf(x) + dg(x)) dx &= (cF(b) + dG(b)) - (cF(a) + dG(a)) = \\ &= c(F(b) - F(a)) + d(G(b) - G(a)) = \\ &= c \int_a^b f(x) dx + d \int_a^b g(x) dx. \end{aligned} \quad (698)$$

Věta o tranzitivitě Riemannova integrálu

Nechť je funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, $c \in (a, b)$. Potom platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (699)$$

Důkaz:

Nechť funkce F je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, a nechť

$$\forall x \in (a, b): F'(x) = f(x). \quad (700)$$

Podle hlavní Riemannovy věty pak platí

$$\int_a^c f(x) dx = F(c) - F(a), \quad (701)$$

$$\int_c^b f(x) dx = F(b) - F(c).$$

Proto

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \end{aligned} \quad (702)$$

Věta o střední hodnotě Riemannova integrálu

Nechť funkce F je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Potom

$$\exists \xi \in \langle a, b \rangle : \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a). \quad (703)$$

Důkaz:

Ze spojitosti funkce $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ plyne, že na intervalu $\langle a, b \rangle$ nabývá svého maxima i minima (Weierstrassova věta). Proto

$$\exists c_1, c_2 \in \langle a, b \rangle : (\forall x \in \langle a, b \rangle : f(c_1) \leq (b-a) \leq f(c_2)). \quad (704)$$

Tedy

$$f(c_1)(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq f(c_2)(b-a), \quad (705)$$

což po vydělení výrazem $(b-a)$ dá

$$f(c_1) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f(c_2). \quad (706)$$

Protože funkce spojitá na intervalu nabývá na tomto intervalu každé z hodnot mezi dvěma různými hodnotami funkce v bodech tohoto intervalu, musí

$$\exists \xi \in \langle a, b \rangle : f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \quad (707)$$

Základní věta matematické analýzy

Nechť funkce F je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Definujme

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (708)$$

Potom

$$F'(x) = f(x). \quad (709)$$

Důkaz:

Podle věty o tranzitivitě Riemannova integrálu a věty o střední hodnotě Riemannova integrálu platí

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{dx} (F(x+dx) - F(x)) = \frac{1}{dx} \left(\int_a^{x+dx} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{dx} \int_x^{x+dx} f(t) dt = \frac{1}{dx} f(\xi) dx = f(\xi), \end{aligned} \quad (710)$$

kde $\xi \in \langle x, x+dx \rangle$. Tedy v limitě $dx \rightarrow 0$ dostáváme rovnost

$$f(\xi) = f(x). \quad (711)$$

Důsledek:

Každá spojitá funkce má vždy primitivní funkci.

Příklad 2:

Vyjádřeme Riemannovým integrálem primitivní funkci k funkci

$$f(x) = x^2 + x. \quad (712)$$

Řešení:

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx = \int_a^x x^2 + x dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} \right), \quad (713)$$

kde konstantu na pravé straně můžeme považovat za integrační konstantu. Speciálně, požadujeme-li integrační konstantu nulovou, je potřeba použít jako dolní integrační mez a prvek

$$a \in \ker \left(\int f(x) dx \right), \quad (714)$$

Jádro tvoří v našem případě kořeny rovnice

$$\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} = 0, \quad (715)$$

neboli

$$a^2(2a + 3) = 0. \quad (716)$$

Tedy

$$a \in \ker \left(\int f(x) dx \right) = \left\{ 0, -\frac{3}{2} \right\}. \quad (717)$$

Odtud tedy buď

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx = \int_0^x x^2 + x dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}. \quad (718)$$

nebo

$$F(x) = \int_{-3/2}^x f(x) dx = \int_{-3/2}^x x^2 + x dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}. \quad (719)$$

Elementární příklady aplikace Riemannova integrálu

1) Geometrické aplikace Riemannova integrálu

Obsah plochy

Je-li plocha S ohraničena na intervalu $\langle a, b \rangle$ křivkami $f(x)$ a $g(x)$, přičemž

$$\forall x \in \langle a, b \rangle: f(x) \geq g(x), \quad (720)$$

potom

$$S(fg)_{ab} = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (721)$$

Důkaz:

Dokazovaný vztah rozepíšeme podle věty o aditivitě Riemannova integrálu:

$$S(fg)_{ab} = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx. \quad (722)$$

Podle hlavní Riemannovy věty je

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (723)$$

plocha, vymezená na intervalu $\langle a, b \rangle$ funkcí $f(x)$ a osou x . Podobně

$$B = \int_a^b g(x) dx \quad (724)$$

je plocha, vymezená na intervalu $\langle a, b \rangle$ funkcí $g(x)$ a osou x .

Chceme dokázat, že hledaný obsah plochy

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad (725)$$

(viz první de Morganův zákon), se dá vyjádřit jako Booleovský rozdíl dvou množin

$$A - B = A \cap B'. \quad (726)$$

jemuž odpovídá plocha

$$S(fg)_{ab} = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx. \quad (727)$$

Je-li $B \subset A$, pak A je univerzální množina a vskutku

$$\begin{aligned} A - B &= B' = A \cap B', \\ (A \cap B)' &= A' \cup (A \cap B') = (A' \cup A) \cap (A' \cup B') = A \cap B', \end{aligned} \quad (728)$$

takže

$$A - B = (A \cap B)'. \quad (729)$$

Pokud $B \not\subset A$, pak přičtením vhodné konstanty c k oběma funkcím f , g , můžeme vždy zařídit, aby nová plocha již splňovala podmínku $B \subset A$. Přitom stále platí, že

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) + c \, dx - \int_a^b g(x) + c \, dx &= \\ &= \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx + \int_a^b c \, dx - \int_a^b c \, dx = \quad (730) \\ &= \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx = S(fg)_{ab}. \end{aligned}$$

Přičtení stejné konstanty k horní i dolní hranici integrované plochy tedy nemění její obsah (plocha se tím pouze posune vzhledem ke zvolené bázi).

Pro úplnost ještě ověříme, že výraz (721) dává vždy nezápornou hodnotu: Mějme dánu nějakou spojitou funkci $h(\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R})$.

Je-li $\forall x \in \langle a, b \rangle : h(x) < 0$, potom její primitivní funkce $H(x)$ je všude na tomto intervalu klesající, neboli

$$H(a) > H(b). \quad (731)$$

Podle Hlavní Riemannovy věty tedy musí platit

$$\int_a^b h(x) = H(b) - H(a) < 0. \quad (732)$$

Je-li $\forall x \in \langle a, b \rangle: h(x) > 0$, potom její primitivní funkce $H(x)$ je všude na tomto intervalu rostoucí, neboli

$$H(a) < H(b) \quad (733)$$

Podle Hlavní Riemannovy věty tedy musí být

$$\int_a^b f(x) = H(b) - H(a) > 0. \quad (734)$$

Vzhledem k předpokladu věty

$$\forall x \in \langle a, b \rangle: f(x) \geq g(x) \quad (735)$$

mohou tedy na každém dílčím podintervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle \subset \langle a, b \rangle$ nastat celkem 3 případy:

$$1) \forall x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle: f(x) \geq 0 \wedge g(x) \geq 0.$$

Potom

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) dx \geq 0 \quad (736)$$

$$2) \forall x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle: f(x) \leq 0 \wedge g(x) \leq 0.$$

Potom $|f(x)| \leq |g(x)|$ a tedy

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x)| dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)| dx \geq 0 \quad (737)$$

$$3) \forall x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle : f(x) \geq 0 \wedge g(x) \leq 0$$

Potom

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x)| dx \geq 0 \quad (738)$$

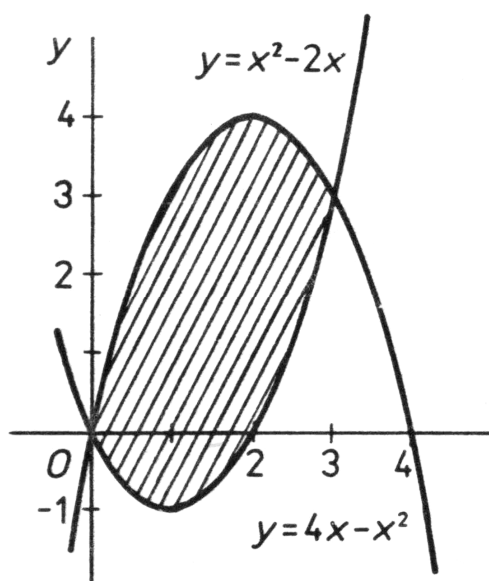
Sumací přes všechny podintervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle \subset \langle a, b \rangle$ získáme, vzhledem k platnosti věty o tranzitivitě Riemannova integrálu, integrální součet přes celý interval $\langle a, b \rangle$, čímž je věta dokázána.

Příklad 1:

Vypočtěme obsah plochy ohraničené parabolami

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x, \\ y &= 4x - x^2. \end{aligned} \quad (739)$$

Obr. 25



Řešení:

Nejprve najdeme průsečíky daných křivek

$$\begin{aligned}x^2 - 2x &= 4x - x^2 \\2x^2 - 6x &= 0 \\x(x - 3) &= 0\end{aligned}\tag{740}$$

Průsečíky tedy mají x -ové souřadnice $a = 0$, $b = 3$. Proto

$$S(fg)_{ab} = \int_a^b (6x - 2x^2) dx = \left[3x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^3 = 27 - \frac{54}{3} = 9.\tag{741}$$

Délka rovinné křivky

Délka grafu funkce f jedné reálné proměnné mezi dvěma body a , b , je dána vztahem

$$d(f)_{a,b} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx\tag{742}$$

Důkaz:

Element délky grafu $f(x)$ je vlastně délkou přepony trojúhelníka s odvěsnami

$$\begin{aligned}x &= x_i - x_{i-1}, \\y &= f(x_i) - f(x_{i-1}),\end{aligned}\tag{743}$$

takže dle Pythagorovy věty

$$d(f)_{i-1,i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.\tag{744}$$

Budeme-li sčítat mnoho takovýchto elementů délky, dostaneme

$$d(f)_{a,b} = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}, \quad (745)$$

kde zřejmě

$$n = \frac{b-a}{x_i - x_{i-1}}. \quad (746)$$

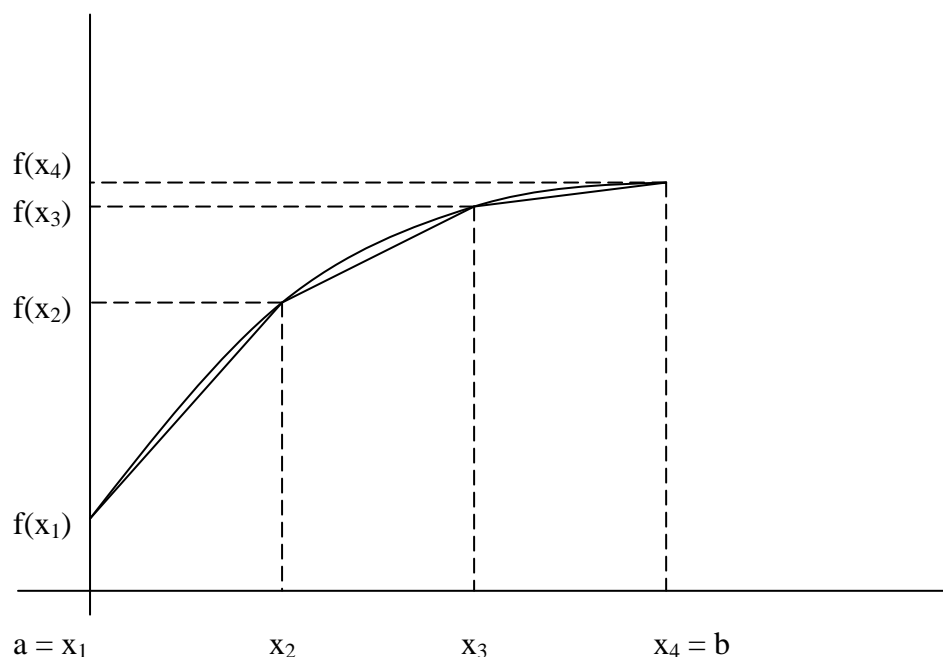
To můžeme podle Lagrangeovy věty upravit na tvar

$$\begin{aligned} d(f)_{a,b} &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(\xi_i))^2 (x_i - x_{i-1})^2} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} (x_i - x_{i-1}). \end{aligned} \quad (747)$$

V limitě $x_i \rightarrow x_{i-1}$ bude $x_i - x_{i-1} = dx$, $n \rightarrow \infty$ a suma přejde v integrál

$$d(f)_{a,b} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (748)$$

Obr. 26



Objem rotačního tělesa

Objem rotačního tělesa vytvořeného rotací křivky $f(x)$ vymezené body a, b , kolem osy $f(x) = 0$ je dán vztahem

$$V(f)_{a,b} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (749)$$

Důkaz:

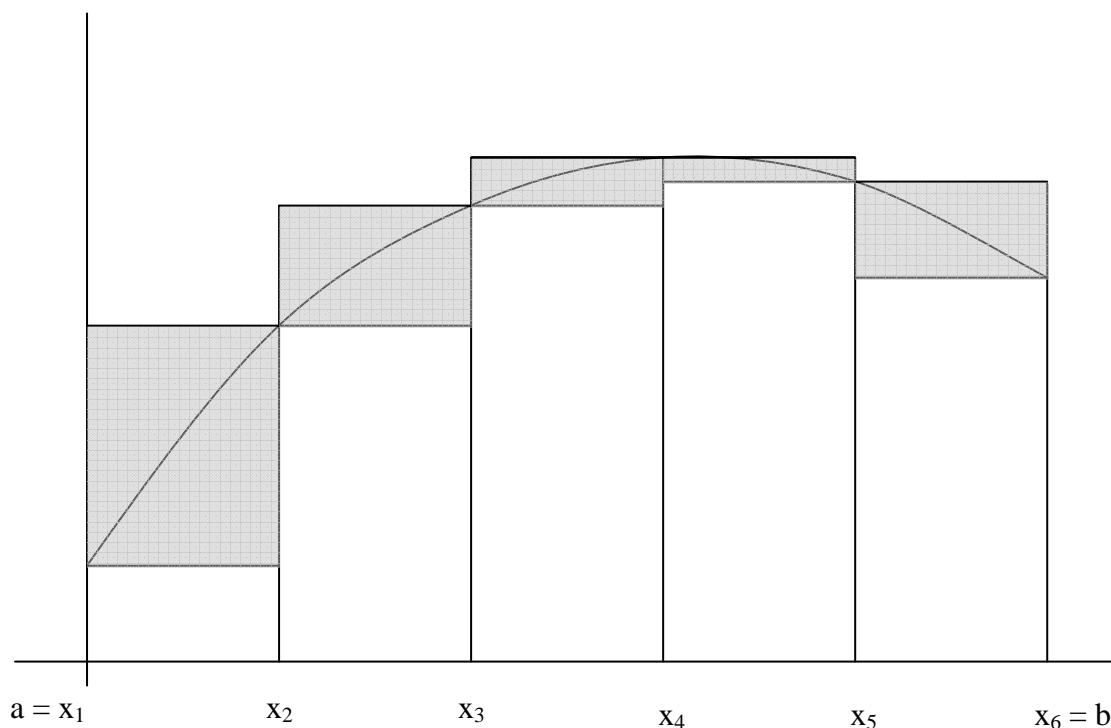
Objem je zřejmě sdola omezen součty objemů válců o poloměrech m_i a výškách $x_i - x_{i-1}$, shora pak součty objemů obdobných válců s poloměry M_i , kde m_i resp. M_i je minimum, resp. maximum funkce f na i -tém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Máme tedy

$$\pi \sum_{i=1}^n m_i^2 (x_i - x_{i-1}) \leq V(f)_{a,b} \leq \pi \sum_{i=1}^n M_i^2 (x_i - x_{i-1}). \quad (750)$$

V limitě $x_i \rightarrow x_{i-1}$ bude $x_i - x_{i-1} = dx$, $n \rightarrow \infty$ a suma přejde v integrál

$$V(f)_{a,b} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (751)$$

Obr. 27



Příklad 2:

Vypočtěte objemy následujících rotačních těles:

a) válec, b) rotační kužel, c) koule, d) rotační elipsoid.

Řešení:

a)

$$V = \pi \int_0^v r^2 dx = \frac{\pi}{2} r^2 v. \quad (752)$$

b)

$$V = \pi \int_0^v \frac{r^2}{v^2} x^2 dx = \pi \frac{r^2}{v^2} \int_0^v x^2 dx = \frac{\pi r^2 v}{3}. \quad (753)$$

c)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r \sqrt{(r^2 - x^2)^2} dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \\ &= 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned} \quad (754)$$

d)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 \right) dx = 2\pi \int_0^a \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 \right) dx = 2\pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_0^a = \\ &= 2\pi b^2 \left(a - \frac{a}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi b^2 a. \end{aligned} \quad (755)$$

Povrch pláště rotačního tělesa

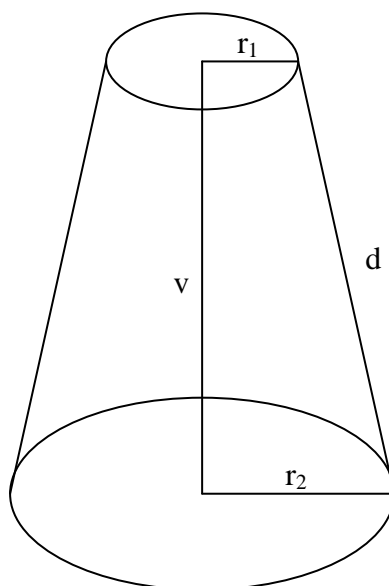
Obsah rotační plochy, která vznikne rotací úseku křivky $f(x)$ vymezené body a, b , kolem osy $f(x) = 0$ je dán vztahem

$$P(f)_{a,b} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (756)$$

Důkaz:

Povrch rotačního tělesa budeme nyní aproximovat součtem pláštěů komolých kuželů o výškách $x_i - x_{i-1}$ mezi základnami o poloměrech $f(x_i)$ a $f(x_{i-1})$.

Obr. 28



Obsah pláště komolého kužele je dán vztahem

$$P = \pi d (r_1 + r_2), \quad (757)$$

neboli

$$P = \pi (f(x_i) + f(x_{i-1})) \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}. \quad (758)$$

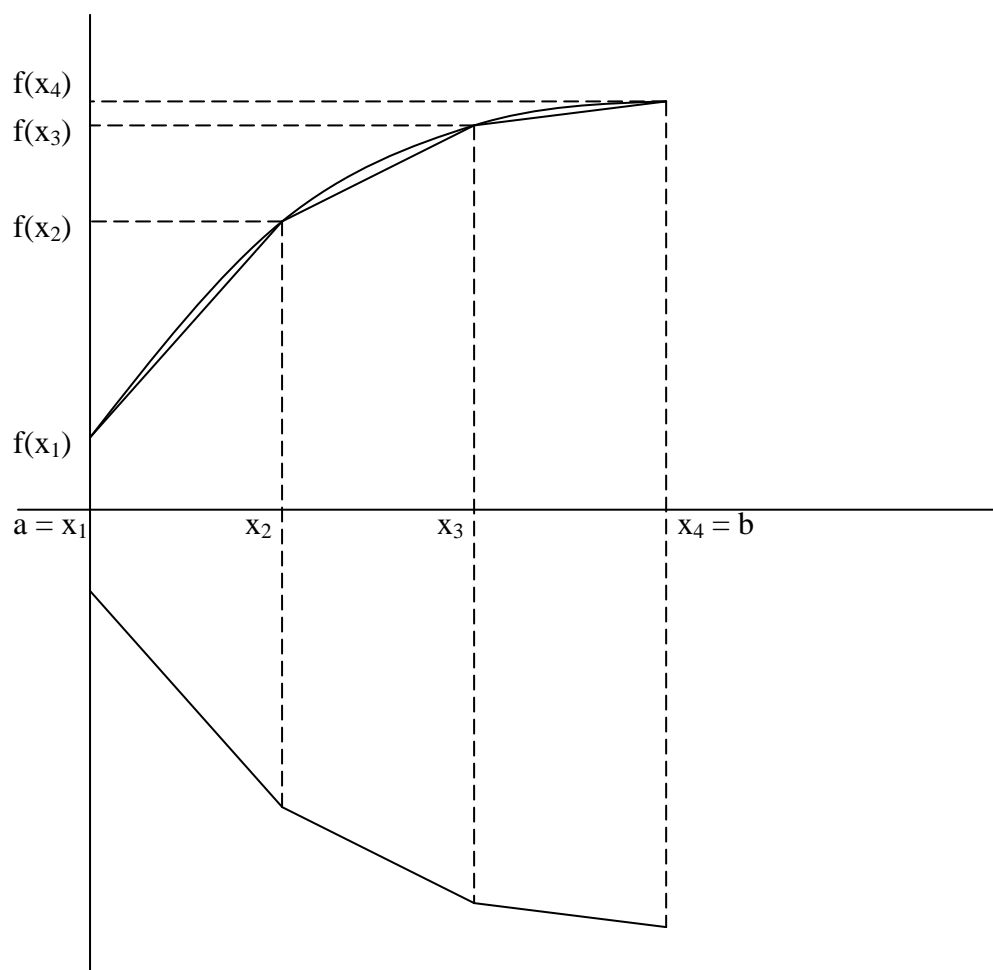
Po sumaci a aplikaci Lagrangeovy věty odtud dostáváme

$$P(f)_{a,b} = \pi \sum_{i=0}^n (f(x_i) + f(x_{i-1})) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} (x_i - x_{i-1}). \quad (759)$$

V limitě $x_i \rightarrow x_{i-1}$ bude $x_i - x_{i-1} = dx$, $n \rightarrow \infty$ a suma přejde v integrál

$$P(f)_{a,b} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (760)$$

Obr. 29



Příklad 3:

Odvoďme vzorec pro výpočet povrchu koule

Řešení:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2},$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad (761)$$

$$x \in \langle -r, r \rangle.$$

Tedy

$$P(f)_{-r,r} = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2 + x^2} dx =$$

$$= 2\pi r \int_{-r}^r dx = 2\pi r [x]_{-r}^r = 4\pi r^2$$

(762)

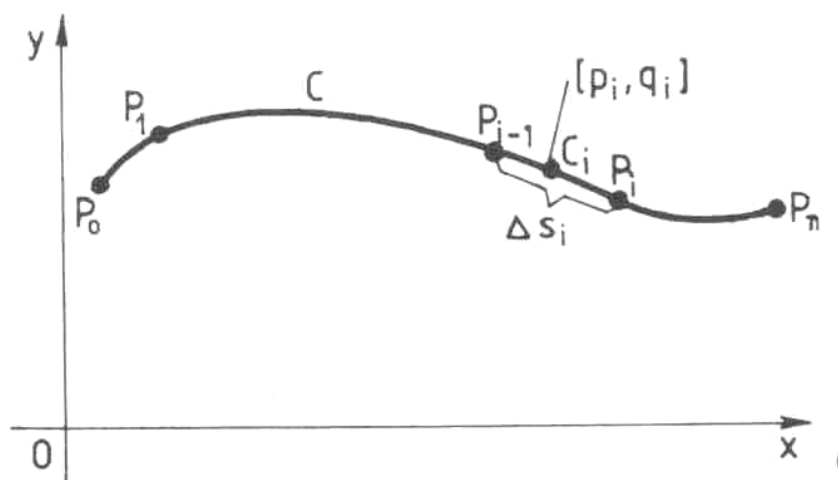
Povrch pláště obecného tělesa

Uvažujme po částech hladkou křivku C zadanou parametricky v rovině:

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}, \quad 0 \leq s \leq \lambda \quad (763)$$

kde parametr s má význam délky křivky.

Obr. 30



Definujme dělení intervalu $\langle 0, \lambda \rangle$,

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = \lambda, \quad (764)$$

tak, že na každém $\langle s_i, s_{i-1} \rangle$ je křivka C hladká. Nechť je v každém bodě

$$P_i = [p_i, q_i] = [x(s), y(s)] \quad (765)$$

křivky C zadána spojitá funkce $f(x, y)$. Označme $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ a utvořme součet

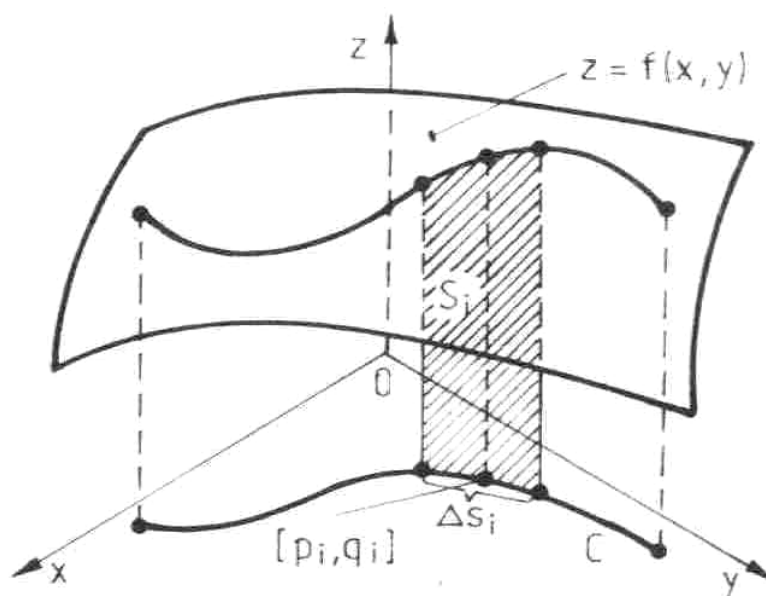
$$\sum_{i=1}^n f(p_i, q_i) \Delta s_i. \quad (766)$$

Tento součet přejde v limitě $\max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\} \rightarrow 0$ v Riemannův integrál

$$\int_0^{\lambda} f(x(s), y(s)) ds. \quad (767)$$

Na obrázku 31 je velmi názorná interpretace. Výraz $f(p_i, q_i) \Delta s_i$ vyjadřuje přibližně obsah S_i , výraz (766) součet odpovídajících obsahů a (767) pak obsah plochy ohraničené sdola plochou $z = 0$, shora plochou $z = f(x, y)$, a vyplněné přímkami rovnoběžnými s osou z , protínajícími křivku C .

Obr. 31



K výpočtu integrálu (767) stačí již jen stanovit ds . Jejíž parametr s má význam délky oblouku, rozdělíme křivku na částečné oblouky a koncové body každého z nich spojíme úsečkou. Tím vznikne polygon vepsaný do křivky. Jsou-li

$$\begin{aligned} P &= [x(t), y(t)], \\ Q &= [x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)], \end{aligned} \quad (768)$$

její koncové body, pak

$$ds = \sqrt{[x(t + \Delta t) - x(t)]^2 + [y(t + \Delta t) - y(t)]^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \quad (769)$$

Tento výraz upravíme pomocí Lagrangeovy věty do konečné podoby

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad (770)$$

Odtud pro délku rovinné křivky zadané parametricky rovnicí (763), plyne

$$s = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt \quad (771)$$

a pro hledaný povrch odtud máme

$$\int_a^b f(x(t), y(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (772)$$

Příklad 4:

Vypočteme povrch pláště tělesa omezeného rovinou xy a funkcí $g(x, y) = x^2 - y$, jehož průmětem do roviny xy je kružnice $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \sin t + \mathbf{j} \cos t$.

Řešení:

$$\begin{aligned} P &= \int_C (x^2 - y) ds = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - \cos t) \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - \cos t) dt = \left[\frac{2t - \sin(2t)}{4} - \sin t \right]_0^{2\pi} = \pi \end{aligned} \quad (773)$$

Délka prostorové křivky

Uvažujme po částech hladkou křivku C zadanou parametricky v prostoru:

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}, \quad 0 \leq s \leq \lambda \quad (774)$$

kde parametr s má význam délky křivky. Jednoduchým zobecněním konstrukce provedené v minulém odstavci dospíváme okamžitě k integrálnímu výrazu pro její délku:

$$s = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (775)$$

Příklad 5:

Vypočtěme délku šroubovice o jednotkovém poloměru a stoupání 2π .

Řešení:

Vyjádříme zadanou šroubovici parametrickými rovnicemi

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{i} \sin t + \mathbf{j} \cos t + \mathbf{k}t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (776)$$

či v ekvivalentní podobě

$$\begin{aligned} x &= \sin t, \\ y &= \cos t, \\ z &= t. \end{aligned} \quad (777)$$

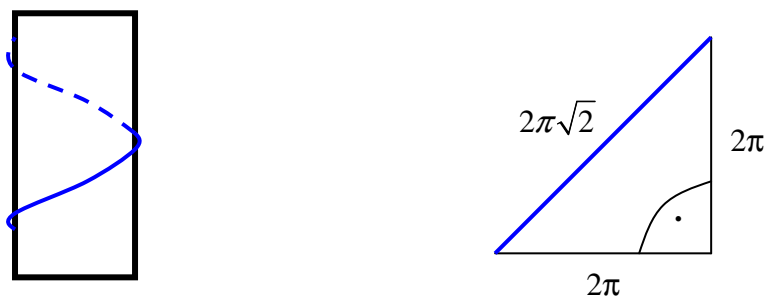
Odtud

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = [t\sqrt{2}]_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{2} \quad (778)$$

Výsledek můžeme snadno ověřit trigonometricky. Jeden závit šroubovice jednotkového poloměru vystoupá dle zadání do výšky 2π . Počítáme tedy ve skutečnosti délku přepony rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka s oběma odvěsnami délky 2π . Dle Pythagorovy věty pro její délku vskutku platí

$$s = \sqrt{4\pi^2 + 4\pi^2} = 2\pi\sqrt{2} \quad (779)$$

Obr. 32

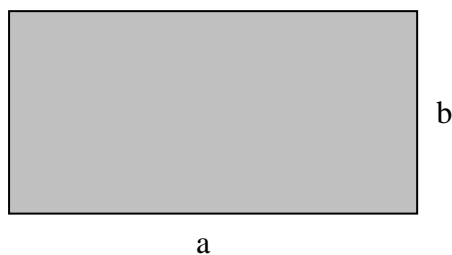


2) Fyzikální aplikace Riemannova integrálu - statika

Příklad 1 - Tlaková síla

Jakou tlakovou silou působí voda na přehradu tvaru obdélníku o stranách a , b ? Nalezněme rovněž působišť této tlakové síly

Obr. 33



Řešení:

Plocha přehrady je

$$S = ab. \quad (780)$$

Tlaková síla na tuto plochu je definována jako

$$F = p \cdot S, \quad (781)$$

V našem případě je p lineární funkcí hloubky h (změnu intenzity gravitačního pole g s hloubkou zanedbáváme, tj. úlohu řešíme pro homogenní gravitační pole, vodu považujeme za nestlačitelnou kapalinu, takže rovněž i hustotu ρ pokládáme za invariant):

$$p(h) = \rho gh. \quad (782)$$

Odtud diferenciál síly činí

$$dF(h) = p(h) \cdot S dh = \rho gSh dh = \rho gabh dh. \quad (783)$$

Integrací získáme výslednou sílu působící na celou plochu přehrady:

$$F(h) = \int_0^b \rho gabh dh = \left[\frac{\rho gabh^2}{2} \right]_0^b = \frac{\rho gab^3}{2}. \quad (784)$$

Moment tlakových sil vzhledem k přímce $h = 0$ je

$$M = \int_0^h \rho Sgh^2 dh = \frac{1}{3} \rho Sgh^3 \quad (785)$$

a působiště síly leží tedy v hloubce

$$h_0 = \frac{M}{F} = \frac{2}{3}h. \quad (786)$$

Statické momenty a těžiště těles

Pokud se těleso skládá z diskretních hmotných bodů, vypočteme jeho těžiště coby bod, vzhledm k němuž je součet momentů gravitační síly působící na všechny body tělesa nulový. Požadujeme tedy, aby

$$T_x = \frac{\sum_i^j x_i m_i}{\sum_i m_i}, \quad T_y = \frac{\sum_i^k y_i m_i}{\sum_i m_i}, \quad T_z = \frac{\sum_i^l z_i m_i}{\sum_i m_i} \quad (787)$$

Protože

$$\sum m_i = m = \rho V, \quad (788)$$

můžeme (787) rovněž psát jako

$$T_x = \frac{\sum_i^j x_i V}{V}, \quad T_y = \frac{\sum_i^k y_i V}{V}, \quad T_z = \frac{\sum_i^l z_i V}{V}. \quad (789)$$

Ve speciálních případech lineárních resp. plošných útvarů samozřejmě nahradíme objemovou hustotu lineární, resp. plošnou hustotou, a objem délkou, resp. plochou.

Zobecnění diskretního tělesa spojitým, vede k nahrazení sumačních znaků integrály:

$$T_x = \frac{\int_a^b xV(x)dx}{V}, \quad T_y = \frac{\int_c^d y(x)V(x)dx}{V}, \quad T_z = \frac{\int_e^f z(x)V(x)dx}{V}. \quad (790)$$

Výrazy v čitateli se nazývají **statické momenty** tělesa. V případě lineárních a plošných útvarů nám nebude výpočet těchto integrálů činit žádné potíže.

Pro obecné třírozměrné těleso vede tento problém na integrály funkcí více proměnných (tzv. trojné integrály). Pokud se však zkoumané těleso vyznačuje rotační symetrií, naše úloha se tím výrazně zjednoduší. Můžeme pak využít poznatky z minulé kapitoly pro sestavení následující tabulky

Tabulka 4

Druh tělesa	Statické momenty	Geometrické charakteristiky	Těžiště
Lineární tělesa	$S_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2} dx$	$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$	$T_x = \frac{S_y}{l}$
	$S_y = \int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2} dx$		$T_y = \frac{S_x}{l}$
Plošná tělesa	$S_x = \frac{1}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$	$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$	$T_x = \frac{S_y}{S}$
	$S_y = \int_a^b x(f(x) - g(x)) dx$		$T_y = \frac{S_x}{S}$
Dutá rotační tělesa	$S_{xz} = 0$	$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2} dx$	$T_x = \frac{S_{yz}}{P}$
	$S_{yz} = 2\pi \int_a^b xf(x)\sqrt{1+(f'(x))^2} dx$		$T_y = T_z = 0$
Rotační tělesa	$S_{xz} = 0$	$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$	$T_x = \frac{S_{yz}}{V}$
	$S_{yz} = \pi \int_a^b xf^2(x) dx$		$T_y = T_z = 0$

Příklad 2:

Stanovme polohu hmotného středu homogenní polokoule

Řešení:

Vězměme tu část koule, která leží v poloprostoru $x > 0$.

Dvě ze souřadnic středu T_y a T_z jsou z důvodu symetrie nulové. Potom

$$T_x = \frac{\int x dV}{\int dV} = \frac{\pi \int_0^r x(r^2 - x^2) dx}{\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx} = \frac{\frac{\pi r^4}{4}}{\frac{2\pi r^3}{3}} = \frac{3}{8} r. \quad (791)$$

Momenty setrvačnosti rotačních těles vzhledem k rotační ose

Výpočet momentu setrvačnosti obecného tělesa je poměrně komplikovaný problém vedoucí k tenzorovým rovnicím. Pro případ existence rotační symetrie a homogenity se dá však ukázat, že moment setrvačnosti tělesa vyjadřuje jednoduchý integrální výraz

$$J = \frac{\pi\rho}{2} \int_a^b f^4(x) dx. \quad (792)$$

Příklad 3:

Vypočtěme momenty setrvačnosti následujících rotačních těles:

a) válec, b) rotační kužel, c) koule, d) rotační elipsoid.

Řešení:

a)

$$J = \rho \frac{\pi}{2} \int_0^v r^4 dx = \rho \frac{\pi}{2} r^4 v = \rho \cdot \pi r^2 v \cdot \frac{r^2}{2} = \frac{m r^2}{2}. \quad (793)$$

b)

$$J = \rho \frac{\pi}{2} \int_0^v \frac{r^4}{v^4} x^4 dx = \rho \frac{\pi r^4}{2 v^4} \int_0^v x^4 dx = \frac{\rho \pi r^4 v}{10} = \rho \cdot \frac{\pi r^2 v}{3} \cdot \frac{3 r^2}{10} = m \frac{3 r^2}{10}. \quad (794)$$

c)

$$\begin{aligned} J &= \rho \frac{\pi}{2} \int_{-r}^r \sqrt{(r^2 - x^2)^4} dx = \rho \frac{\pi}{2} \int_{-r}^r (r^2 - x^2)^2 dx = \rho \frac{\pi}{2} \int_{-r}^r r^4 - 2r^2 x^2 + x^4 dx = \\ &= \rho \pi \int_0^r r^4 - 2r^2 x^2 + x^4 dx = \rho \pi \left[r^4 x - 2 \frac{r^2 x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^r = \\ &= \rho \pi \frac{15r^5 - 10r^5 + 3r^5}{15} = \rho \pi \frac{8}{15} r^5 = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \frac{2r^2}{5} = \frac{2}{5} m r^2. \end{aligned} \quad (795)$$

d)

$$\begin{aligned} J &= \rho \frac{\pi}{2} \int_{-a}^a \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 \right)^2 dx = \rho \frac{\pi}{2} \int_{-a}^a b^4 - 2 \frac{b^4}{a^2} x^2 + \frac{b^4}{a^4} x^4 dx = \\ &= \rho \pi \int_0^a b^4 - 2 \frac{b^4}{a^2} x^2 + \frac{b^4}{a^4} x^4 dx = \rho \pi b^4 \left[x - 2 \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} \right]_0^a = \\ &= \rho \pi b^4 \left(a - \frac{2}{3} a + \frac{1}{5} a \right) = \frac{8}{15} \rho \pi b^4 a = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi b^2 a \cdot \frac{2}{5} b^2 = \frac{2}{5} m b^2 \end{aligned} \quad (796)$$

3) Fyzikální aplikace Riemannova integrálu - dynamika

Práce a energie

Práce W vykonaná silou $F(x)$ po dráze $x = x_2 - x_1$ je definována jako integrál síly $F(x)$ podle dráhy x .

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx. \quad (797)$$

Působíme-li touto silou na hmotný bod hmotnosti m a vyjádříme-li sílu podle 2. Newtonova zákona, máme

$$W = m \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 x}{dt^2} dx = m \int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dt} dx = m \int_{v_{x_1}}^{v_{x_2}} \frac{dx}{dt} dv = m \int_{v_{x_1}}^{v_{x_2}} v dv = \frac{mv_{x_2}^2}{2} - \frac{mv_{x_1}^2}{2}, \quad (798)$$

kde v_{x_i} je rychlost hmotného bodu v místě x_i . Speciálně, pro nulovou počáteční rychlost ($v_{x_1} = 0$) odtud dostáváme

$$W = \frac{mv_{x_2}^2}{2}. \quad (799)$$

Zavedeme ještě veličinu E_k zvanou **kinetická energie**, coby míru práce, kterou je třeba vynaložit na urychlení tělesa z nulové rychlosti na výslednou rychlost v . Pak vzhledem k (799) zřejmě platí

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (800)$$

Aplikujme nyní naše dosavadní poznatky na nám již dobře známý případ homogenního gravitačního pole. To je charakterizováno působením konstantní síly velikosti

$$F_g = mg \quad (801)$$

na testovací těleso hmotnosti m , kde $g = \text{konst.}$ je gravitační zrychlení. Práce, kterou je nutno v tomto poli vykonat na vyzdvižení testovacího tělesa do výšky $h = x_2 - x_1$ je podle (797) dána integrálem

$$W = m \int_{x_1}^{x_2} g \, dx = m \int_0^h g \, dx = mgh. \quad (802)$$

S vykonáním této práce je rovněž spojena změna jistého druhu energie. V tomto případě se jedná o energii potenciální E_p . Můžeme-li zanedbat nekonzervativní síly, jako např. odpor vzduchu, pak práce vykonaná na testovacím tělese představuje energii, jež nemůže testovací těleso nijak opustit a zůstává v něm tedy trvale akumulována. V čistě konzervativním poli, se nám tak zachovává celková energie E testovacího tělesa, která je dána součtem

$$E = E_k + E_p = \text{konst.} \quad (803)$$

Příklad 1:

Jakou rychlostí dopadne na zem těleso, puštěné volným pádem z výšky $h = 100 \text{ m}$?

Řešení:

Protože platí $h \ll R_z$, můžeme pole považovat za homogenní. Máme tedy

$$E_p = mgh = E_k = \frac{mv^2}{2} \quad (804)$$

$$v = \sqrt{2gh} \approx 44 \text{ m/s} \approx 159 \text{ km/h}$$

Náraz do pevné překážky ve stošedesátakilometrové rychlosti tedy přibližně odpovídá pádu ze stometrové výšky na tvrdou plochu.

Radiální pohyb v centrálně symetrickém gravitačním poli

Pohyb v centrálním gravitačním poli je obecně popsán rovnicí

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} = \frac{GM}{r^2(t)}. \quad (805)$$

Operovat budeme v soustavě souřadné s počátkem v centru gravitačního pole.

Protože gravitační pole je pole konzervativní, můžeme nalézt obecné řešení rovnice (805) prostým porovnáním

$$E_p = E_k, \quad (806)$$

kde

$$\begin{aligned} E_p &= \int_r^{r_0} F_g dr = G \cdot m \cdot M \cdot \int_r^{r_0} r^{-2} dr = G \cdot m \cdot M \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_r^{r_0} = \\ &= G \cdot m \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \end{aligned} \quad (807)$$

$$\begin{aligned} E_k &= \int_{r_0}^r F dr = m \int_{r_0}^r \frac{dv}{dt} dr = m \int_{v_0}^v \frac{dr}{st} dv = m \int_{v_0}^v v dv = \left[\frac{mv^2}{2} \right]_{v_0}^v = \\ &= \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - v_0^2 \right] \end{aligned} \quad (808)$$

Odtud

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - v_0^2 \right] = GM \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (809)$$

a tedy

$$v = \frac{dr}{dt} = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + v_0^2} = \sqrt{\frac{2GM(r_0 - r) + v_0^2 r r_0}{r r_0}} \quad (810)$$

neboli

$$dt = \sqrt{\frac{r r_0}{2GM(r_0 - r) + v_0^2 r r_0}} dr \quad (811)$$

a

$$t = \int_r^{r_0} \sqrt{\frac{r r_0}{2GM(r_0 - r) + v_0^2 r r_0}} dr. \quad (812)$$

Abychom dostali pohybovou rovnici, měli bychom odtud vyjádřit r .
Provedením substituce

$$x = r(r_0 v_0^2 - 2GM) + 2GM r_0, \quad (813)$$

$$r = \frac{x - 2GM r_0}{r_0 v_0^2 - 2GM},$$

obdržíme diferenciál

$$dx = (r_0 v_0^2 - 2GM) dr. \quad (814)$$

Odtud, dosazením do (812), máme

$$\begin{aligned}
t &= \int_r^{r_0} \sqrt{\frac{r_0(x - 2GM r_0)}{x(r_0 v_0^2 - 2GM)}} dr = \int_r^{r_0} \sqrt{\frac{r_0(x - 2GM r_0)}{x(r_0 v_0^2 - 2GM)^2}} dx = \\
&= \frac{\sqrt{r_0}}{r_0 v_0^2 - 2GM} \int_r^{r_0} \sqrt{1 - \frac{2GM r_0}{x}} dx
\end{aligned} \tag{815}$$

Poslední integrál můžeme snadno převést substitucí

$$\begin{aligned}
y^2 &= \frac{x - 2GM r_0}{x}, \\
x &= \frac{2GM r_0}{1 - y^2}, \\
dx &= \frac{4GM r_0 y}{(y^2 - 1)^2} dy,
\end{aligned} \tag{816}$$

na integrál racionální lomené funkce

$$t = \frac{\sqrt{r_0}}{r_0 v_0^2 - 2GM} \int_r^{r_0} \sqrt{1 - \frac{2GM r_0}{x}} dx = \frac{4GM \sqrt{r_0^3}}{r_0 v_0^2 - 2GM} \int_r^{r_0} \frac{y^2}{(y^2 - 1)^2} dy, \tag{817}$$

jejíž expanzí dostaneme výsledek

$$\begin{aligned}
t &= \frac{4GM \sqrt{r_0^3}}{r_0 v_0^2 - 2GM} \int_r^{r_0} \frac{1}{4(y-1)^2} + \frac{1}{4(y+1)^2} + \frac{1}{4(y-1)} - \frac{1}{4(y+1)} dy = \\
&= \frac{GM \sqrt{r_0^3}}{2GM - r_0 v_0^2} \left[\frac{1}{y-1} + \frac{1}{y+1} - \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| \right]_r^{r_0}.
\end{aligned} \tag{818}$$

Odsostituováním dostáváme hledanou pohybovou rovnici:

$$t = \frac{GM\sqrt{r_0^3}}{2GM - r_0v_0^2} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{r(r_0v_0^2 - 2GM)}{r(r_0v_0^2 - 2GM) + 2GMr_0} - 1}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{r(r_0v_0^2 - 2GM)}{r(r_0v_0^2 - 2GM) + 2GMr_0} + 1}} - \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{r(r_0v_0^2 - 2GM)}{r(r_0v_0^2 - 2GM) + 2GMr_0} - 1}}{\sqrt{\frac{r(r_0v_0^2 - 2GM)}{r(r_0v_0^2 - 2GM) + 2GMr_0} + 1}} \right| \right]_{r_0}^r$$

(819)

Příklad 2:

Za jakou dobu dopadne na zemský povrch těleso, puštěné volným pádem z výšky $h = 1000$ km? Odpor vzduchu neuvažujme.

Řešení:

Protože tato výška je již řádově srovnatelná s poloměrem Země, nejsme oprávněni použít aproximace homogenního pole. Proto

$$t = \int_{6378388}^{7378388} \sqrt{\frac{7378388r}{6 \cdot 10^{24} (7378388 - r) \cdot 2G}} dr \approx 509,5 \text{ s.} \quad (820)$$

Bude zajímavé, porovnat získaný přesný výsledek s přibližným výsledkem vypočteným pro homogenní pole o konstantní intenzitě $g \approx 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$:

$$h = \iint g dt = \frac{gt^2}{2}, \quad (821)$$

odkud

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx \sqrt{\frac{2000000}{9.81}} \approx 451.5 \text{ s.} \quad (822)$$

Jelikož intenzita centrálně symetrického pole klesá s druhou mocninou výšky h , kdežto u homogenního pole na h vůbec nezávisí, vychází doba volného pádu pro centrálně symetrický případ zcela pochopitelně větší.

Úniková rychlost

Příklad 3:

Vypočtěme, jakou minimální rychlostí je potřeba v centrálně symetrickém poli vrhnout těleso kolmo vzhůru, aby uletělo do nekonečna. Odpor prostředí opět zanedbejme.

Řešení:

Máme stanovit minimální kinetickou energii, která na nějaké ekvipotenciální ploše v centrálně symetrickém gravitačním poli odpovídá potenciální energii téhož tělesa v nekonečnu. To je však snadné. Vyjdeme-li ze vztahů (807) a (808) odvozených v minulém odstavci, stačí porovnat

$$E_p = G \cdot m \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = E_k = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - v_0^2 \right]. \quad (823)$$

Protože počítáme minimální únikovou rychlost, máme okrajové podmínky

$$\begin{aligned} r &= 0, \\ \frac{dr}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (824)$$

čili v nekonečnu se má těleso úplně zastavit. S těmito okrajovými podmínkami se nám rovnice (823) zjednoduší na tvar

$$\frac{GM}{r_0} = \frac{v_0^2}{2}. \quad (825)$$

Odtud již máme výsledek

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}. \quad (826)$$

Pozorování:

Specielně, položíme-li počáteční rychlost rovnu rychlosti světla

$$v_0 = c, \quad (827)$$

můžeme z výrazu (826) vyjádřit poloměr r_0 , pod nějž když stlačíme veškerou hmotu M , neunikne do nekonečna dokonce ani samo světlo. Jedná se o tzv. **gravitační poloměr**, tvořící **horizont událostí**, neboli hranici **černé díry**:

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2}. \quad (828)$$

Např. pro celou hmotu Zeměkoule činí gravitační poloměr pouhých 9 mm.

Obecná trajektorie tělesa v centrálně symetrickém gravitačním poli

V centrálním gravitačním poli jsou celková mechanická energie E a moment hybnosti testovací částice \mathbf{b} konstantní:

$$E = \text{konst.} \quad (829)$$

$$b = rmv \sin \alpha = \text{konst.}$$

Tyto rovnice vyjadřují zachování celkové energie a absolutní hodnoty momentu hybnosti v průběhu pohybu. Tyto rovnice nyní přepíšeme do polárních souřadnic, v nichž se nám úloha značně zjednoduší. Pro azimutální složku rychlosti v_φ plyne

$$v_\varphi = r\omega = r \frac{d\varphi}{dt}, \quad (830)$$

odkud

$$b = mr^2 \frac{d\varphi}{dt}. \quad (831)$$

Pro radiální složku rychlosti v_r máme

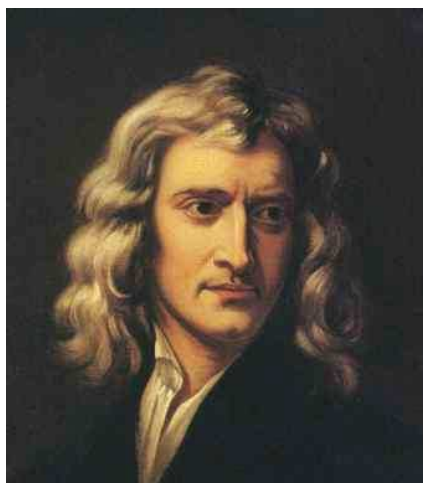
$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad (832)$$

odkud pro kvadrát celkové rychlosti plyne

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \quad (833)$$

Proto

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right] - \frac{GMm}{r}. \quad (834)$$



Isaac Newton (1643 – 1727)

Rovnice (831), (834) tvoří hledanou soustavu diferenciálních rovnic pro určení neznámých funkcí

$$\begin{aligned} r &= r(t), \\ \varphi &= \varphi(t), \end{aligned} \tag{835}$$

popisujících pohyb tělesa v centrálním gravitačním poli. Dosazením (833) do (834) máme

$$E = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(\frac{b}{mr} \right)^2 \right] - \frac{GMm}{r}, \tag{836}$$

odkud

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{b^2}{m^2 r^2}} \tag{837}$$

a tedy

$$t = \int \left(\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{b^2}{m^2 r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} dr. \tag{838}$$

Pro nalezení dráhy je však potřeba najít závislost $r = r(\varphi)$. Podle věty o derivaci komposice můžeme psát

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dr}, \tag{839}$$

přičemž hodnotu $\frac{d\varphi}{dt}$ lze určit z rovnice (831) a hodnotu $\frac{dr}{dt}$ z rovnice (837). Dostáváme tak

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{b}{mr^2 \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{b^2}{m^2 r^2}}}, \tag{840}$$

neboli

$$\varphi = \int \frac{b}{mr^2 \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{b^2}{m^2 r^2}}} dr = \arccos \frac{\frac{b}{r} - \frac{GMm^2}{b}}{\sqrt{2mE + \left(\frac{GMm^2}{b}\right)^2}}. \quad (841)$$

Rovnici (841) lze upravit na tvar

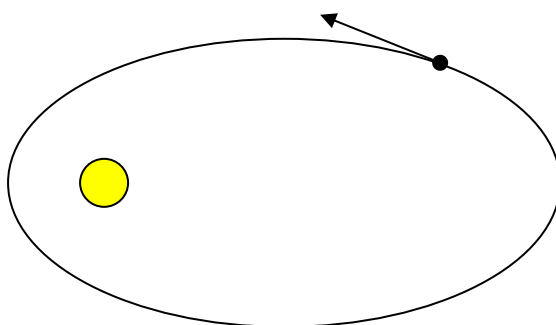
$$\frac{b^2}{GMm^2 r} = 1 + \left(\frac{2Eb^2}{G^2 M^2 m^3} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi, \quad (842)$$

odkud

$$r(\varphi) = \frac{b^2}{GMm^2 \left[1 + \left(\frac{2Eb^2}{G^2 M^2 m^3} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \right]}, \quad (843)$$

což je hledaná trajektorie testovací částice vyjádřená v polárních souřadnicích.

Obr. 34



Všimněme si, že je-li výraz pod odmocninou menší než 1, pak rovnice (843) popisuje uzavřenou eliptickou dráhu. Je-li tento výraz naopak větší než 1, pohybuje se testovací částice po hyperbole. Pakliže je

výraz pod odmocninou přesně jednotkový, jde o mezní případ pohybu po parabolické dráze (elipsa protažená do nekonečna).

Lineární harmonický oscilátor

Jak již víme, harmonickým oscilátorem rozumíme systém, jehož potenciální energie je kvadratickou funkcí souřadnic.

V nejjednodušším jednorozměrném případě si jej lze představit jako pohyb bodu pod vlivem síly, která je přímo úměrná vzdálenosti bodu od rovnovážné polohy a má opačný směr, tedy

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - x_0). \quad (844)$$

Řešením je harmonická funkce

$$x = x_0 + x_{\max} \sin(\omega t + \varphi). \quad (845)$$

Pro kinetickou energii odtud dostáváme (s vědomím že $v_0 = 0$)

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} k x_{\max}^2 \cos^2(\omega t + \varphi), \quad (846)$$

a pro energii potenciální

$$\begin{aligned} V &= \int_{x_0}^x -F dx = k \int_{x_0}^x (x - x_0) dx = k \left[\frac{x^2}{2} - x_0 x \right]_{x_0}^x = \\ &= k \left(\frac{x^2}{2} - x_0 x - \frac{x_0^2}{2} + x_0^2 \right) = \frac{k}{2} (x^2 - 2x_0 x + x_0^2) = \frac{k}{2} (x - x_0)^2 = \\ &= \frac{1}{2} k x_{\max}^2 \sin^2(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (847)$$

Celková energie harmonického oscilátoru tedy bude

$$W = E + V = \frac{1}{2} k x_{\max}^2 \left(\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi) \right) = \frac{1}{2} m \omega^2 x_{\max}^2. \quad (848)$$

Příklad 4:

Vypočtěme práci potřebnou pro natažení pružiny tuhosti k o úsek x_{\max} . Na jaké frekvenci bude kmitat oscilátor tvořený touto pružinou a závažím hmotnosti m ?

Řešení:

Z definice práce plyne, že máme spočítat

$$W = \int_0^{x_{\max}} F(x) dx. \quad (849)$$

Z diferenciální rovnice (379) ihned vidíme, že

$$F(x) = kx, \quad (850)$$

takže

$$W = \int_0^{x_{\max}} kx dx = \left[\frac{kx^2}{2} \right]_0^{x_{\max}} = \frac{kx_{\max}^2}{2}. \quad (851)$$

Pozorování:

Porovnáním vztahů (851) a (848) dospíváme okamžitě k rovnosti (381)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (852)$$

což je zároveň odpověď na druhou část otázky.

Kinetická energie rotujícího tělesa

Mechanická energie rotujícího tělesa je dána součtem kinetických energií všech jeho částic:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\omega^2 \mathbf{r}_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i)^2 \right]. \quad (853)$$

Poslední výraz přepíšeme ve složkách

$$E_k = \sum_{i,k,l} \frac{1}{2} m_i (\delta_{kl} r_i^2 - r_{ik} r_{il}) \omega_k \omega_l. \quad (854)$$

Definujeme-li výraz

$$J_{kl} = \sum_i m_i (\delta_{kl} r_i^2 - r_{ik} r_{il}) \quad (855)$$

jako tenzor setrvačnosti, pak můžeme (854) přepsat v kompaktním tvaru, jako

$$E_k = \sum_{k,l} \frac{1}{2} J_{kl} \omega_k \omega_l. \quad (856)$$

Protože je tenzor setrvačnosti symetrický, existuje vždy taková soustava souřadnic, ve které je diagonální. Jeho diagonální složky v této soustavě označme J_x, J_y, J_z , a potom platí:

$$E_k = \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2). \quad (857)$$

Kde $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ jsou složky vektoru úhlové rychlosti v této soustavě. Speciálně, zajímáme-li se pouze o rotaci vůči pevné ose, tedy ose jejíž

poloha se v tělese nemění, definujeme skalární moment setrvačnosti J vůči této ose jako

$$J = \sum_i m_i r_i^2, \quad (858)$$

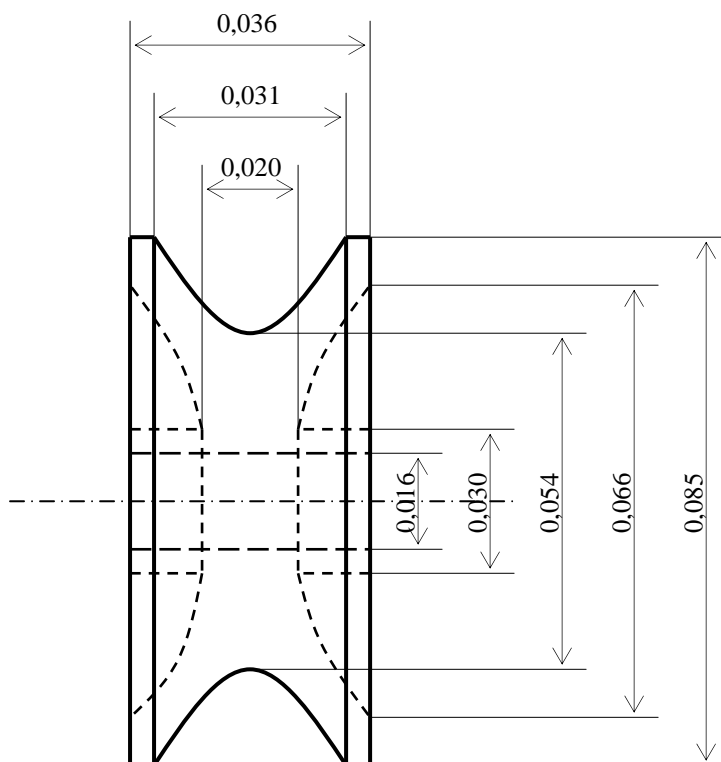
kde r_i je vzdálenost i -té částice od osy rotace. Výraz pro kinetickou energii rotujícího tělesa v tomto případě nabývá velmi jednoduchý tvar

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2. \quad (859)$$

Příklad 5:

Vypočti dobu kutálení mosazného kolečka znázorněného na následujícím obrázku, vypuštěného z klidu, po nakloněné rovině délky $l = 1\text{ m}$, s úhlem sklonu $\alpha = \arctan 0,1$

Obr. 35



Řešení:

Drážku na obvodu kola aproximujeme parabolou procházející body $[0;0,0270]$, $[-0,0115;0,0425]$, $[0,0155;0,0425]$. Řešíme tedy rovnici

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}, \quad (860)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,0155^2 & -0,0155 & 1 \\ 0,0155^2 & 0,0155 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0,0270 \\ 0,0425 \\ 0,0125 \end{pmatrix}. \quad (861)$$

Řešením je vektor

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 64,520 \\ 0 \\ 0,027 \end{pmatrix}. \quad (862)$$

Hledaná parabola je tedy funkcí

$$f(x) = 64,52x^2 + 0,027. \quad (863)$$

Postranní vybrání mají tvar kulových ploch. Z naměřených hodnot metodami analytické geometrie snadno vypočteme jejich poloměr $r = 0,06$ m.

Explicitní vyjádření ve vhodné bázi má potom tvar

$$g(x) = \pm\sqrt{0,06^2 - x^2}. \quad (864)$$

Zbylé části tělesa pak již tvoří pouze válce.

Moment setrvačnosti tohoto kola tedy vypočteme jako

$$J = \frac{\pi\rho}{2} \left[\int_{-0,0155}^{0,0155} (64,52x^2 + 0,027)^4 dx + \int_0^{0,005} 0,0425^4 dx + 2 \int_0^{0,01} 0,015^4 dx - \right. \\ \left. -2 \int_{0,05}^{0,06} (0,06^2 - x^2)^2 dx - \int_0^{0,036} 0,008^4 dx \right] = 6,257 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

(865)

a pro jeho hmotnost dostáváme

$$m = \pi\rho \left[\int_{-0,0155}^{0,0155} (64,52x^2 + 0,027)^2 dx + \int_0^{0,005} 0,0425^2 dx + 2 \int_0^{0,01} 0,015^2 dx - \right. \\ \left. -2 \int_{0,05}^{0,06} (0,06^2 - x^2) dx - \int_0^{0,036} 0,008^2 dx \right] = 0,88 \text{ kg.}$$

(866)

Vyjádríme-li energetickou bilanci celého experimentu, platí rovnost

$$\Delta E = mgh = \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} m(\omega r)^2. \quad (867)$$

Odtud získáme velikost úhlové rychlosti kola po překonání dráhy 1m po nakloněné rovině:

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgh}{J + mr^2}} = 28 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (868)$$

Pro obvodovou rychlost valivého pohybu na konci dráhy odtud vychází

$$v = \omega r = 1,19 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (869)$$

Nyní zbývá již jen určit čas, za který těleso překoná uvažovanou dráhu. Protože úhlové zrychlení

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \text{konst.}, \quad (870)$$

platí

$$\omega = \int \varepsilon dt = \varepsilon t = 28 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (871)$$

$$\varphi = \int \int \varepsilon dt = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 = \frac{l}{r} = 23,53 \text{ rad.}$$

Z první rovnice (871) vyjádříme úhlové zrychlení

$$\varepsilon = \frac{28}{t} \quad (872)$$

a po dosazení do druhé rovnice (871) máme konečně

$$t = \frac{2\varphi}{\omega} = 1,68 \text{ s.} \quad (873)$$

Přímým měřením byly získány tyto experimentální výsledky:

$$v = 1,104 \pm 0,040 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (874)$$

$$t = 1,704 \pm 0,060 \text{ s.}$$

Rozdíly jsou v řádu setin a jsou patrně způsobeny převážně zanedbáním disipativních procesů, jako je valivý odpor, odpor vzduchu, apod.

Lebesgueův integrál



Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941)

a) Základy teorie dvojného integrálu

Nechť je dán v rovině xy obdélník

$$P = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle. \quad (875)$$

Zvolme dělení intervalů $\langle a, b \rangle$ a $\langle c, d \rangle$, tj. množin

$$\begin{aligned} \{a = x_0, x_1, \dots, x_m = b\}, \\ \{c = y_0, y_1, \dots, y_n = d\}, \end{aligned} \quad (876)$$

s kroky

$$\begin{aligned} \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \Delta y_i = y_i - y_{i-1}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (877)$$

množinu bodů

$$\tau = \left\{ \left[x_i, y_j \right] \right\} \quad (878)$$

nazveme sítí s kroky (877). Ta je tvořena množstvím mn podobných obdélníků

$$P = \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle \quad (879)$$

o stranách (877). Zvolené síti dále přiřadíme číslo

$$h(\tau) = \max_{i,j} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2} \quad (880)$$

odpovídající délce největší úhlopříčky obdélníků P_{ij} . V každém obdélníku P_{ij} dále zvolíme libovolný bod

$$U_{ij} = [p_i, q_j] \quad (881)$$

a utvoříme integrální součet

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(U_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j. \quad (882)$$

Jestliže

$$\left. \begin{aligned} &\exists I \in \mathbb{R} : (\forall k \in \mathbb{N}^+ \exists \bar{h} \in \mathbb{R}, \bar{h} > 0 : \forall h(\tau) < \bar{h}, \forall U_{ij} \in P_{ij}, \\ &(i = 1, 2, \dots, m), (j = 1, 2, \dots, n) : \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(U_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j - I \leq \frac{10^{-k}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (883)$$

pak číslo I značíme

$$I \equiv \iint_P f(x, y) dx dy \quad (884)$$

a říkáme, že funkce f je integrabilní na obdélníku P .

Na obecné omezené množině $A \subset E_2$ definujeme dvojný integrál funkce f tak, že zvolíme obdélník P , aby platilo $A \subset P$. Dále definujeme na P funkci g takovou, že

$$\begin{aligned} g(x, y) &= f(x, y) \quad \text{pro } (x, y) \in A, \\ g(x, y) &= 0 \quad \text{pro } (x, y) \notin A. \end{aligned} \quad (885)$$

Říkáme, že funkce f je integrabilní na množině A , jestliže existuje funkce g integrabilní na obdélníku P a dvojným integrálem funkce f na A je integrál funkce g na P :

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_P g(x, y) dx dy. \quad (886)$$

Integrál funkce f na množině A pak nezávisí na volbě obdélníku P .

Integrační obory v kartézských souřadnicích

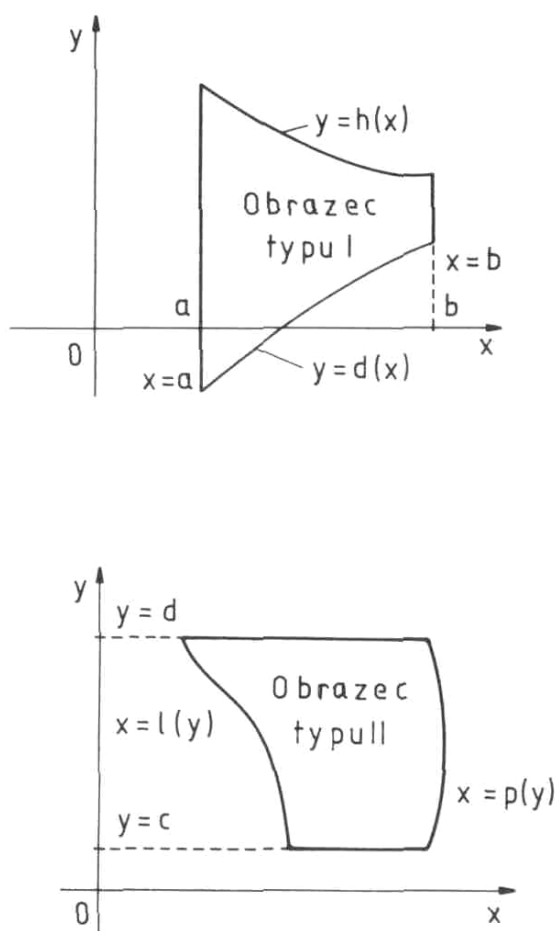
Obrazce prvního typu jsou množiny bodů $[x, y]$ ohraničené grafy funkcí

$$\begin{aligned} a \leq x \leq b, \\ d(x) \leq y \leq h(x). \end{aligned} \quad (887)$$

Obrazce druhého typu jsou množiny bodů $[x, y]$ ohraničené grafy funkcí

$$\begin{aligned} c \leq y \leq d, \\ l(y) \leq x \leq p(y). \end{aligned} \quad (888)$$

Obr. 36



Integrační obory v polárních souřadnicích

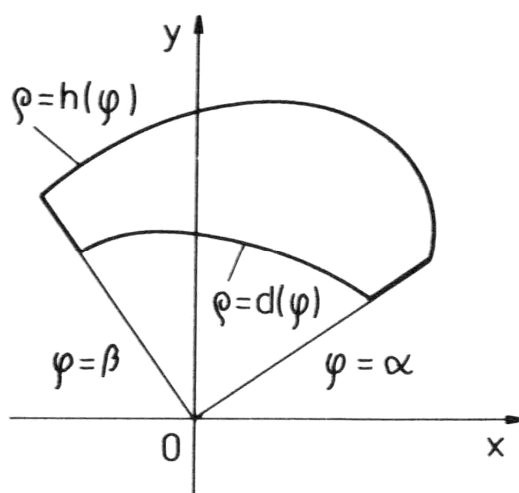
jsou množiny bodů $[\rho, \varphi]$ ohraničené grafy funkcí

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \varphi \leq \beta, \\ d(\varphi) &\leq \rho \leq h(\varphi). \end{aligned} \quad (889)$$

Připomeňme, že vztah mezi polární a kartézskou soustavou souřadnic je dán vztahem plynoucím z definice goniometrických funkcí na jednotkové kružnici:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi. \end{aligned} \quad (890)$$

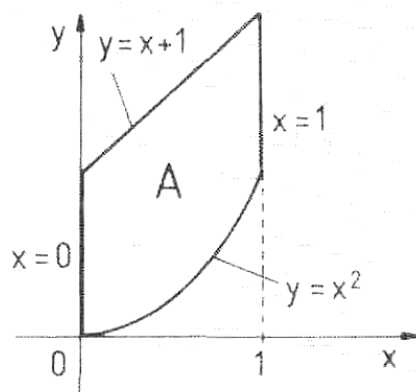
Obr. 37

**Příklad 1:**

Zapišme v kartézských souřadnicích obor ohraničený křivkami

$$\begin{aligned} x = 0, x = 1, \\ y = x + 1, y = x^2. \end{aligned} \quad (891)$$

Obr. 38

**Řešení:**

Obor bude výhodné vyjádřit jako obrazec prvního typu, neboť

$$\forall x \in \langle 0, 1 \rangle : x^2 > x + 1. \quad (892)$$

Tedy

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 \leq y \leq x+1. \end{aligned} \quad (893)$$

Příklad 2:

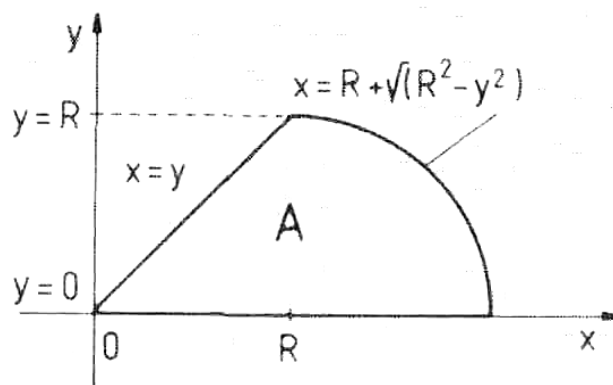
Zapišme v kartézských souřadnicích obor ohraničený přímkami

$$y = 0, y = x, \quad (894)$$

a horní půlkružnici

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2. \quad (895)$$

Obr. 39



Řešení:

Obor bude výhodné vyjádřit jako obrazec druhého typu, neboť

$$\forall y \in \langle 0, R \rangle: R + \sqrt{R^2 - y^2} \geq y. \quad (896)$$

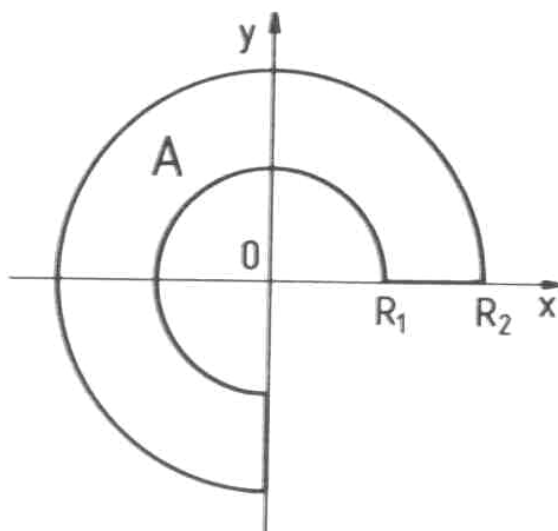
Tedy

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq R, \\ y \leq x \leq R + \sqrt{R^2 - y^2}. \end{aligned} \quad (897)$$

Příklad 3:

Zapišme v polárních souřadnicích obor ohraničený částí mezikruží v prvním a třetím kvadrantu, ohraničeného kružnicemi o poloměrech R_1, R_2 , $R_1 < R_2$.

Obr. 40

**Řešení:**

Rovnice jednotlivých kružnic jsou

$$\rho = R_1, \quad (898)$$

$$\rho = R_2.$$

Pro úhel φ platí

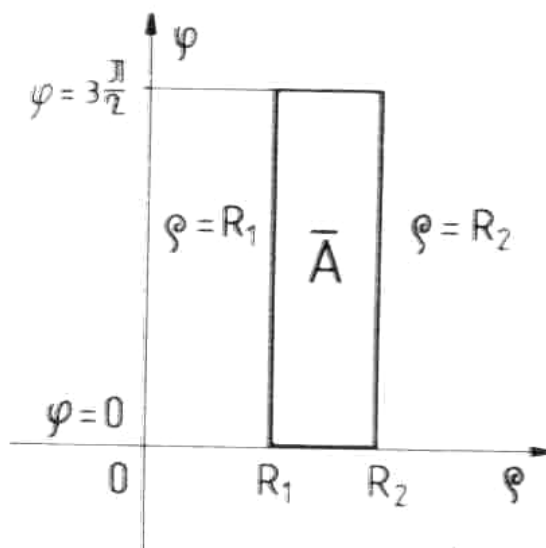
$$\varphi \in \left\langle 0, \frac{3\pi}{2} \right\rangle. \quad (899)$$

Obor tedy zapíšeme nerovnostmi

$$0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2},$$

$$R_1 \leq \rho \leq R_2. \quad (900)$$

Obr. 41



Příklad 4:

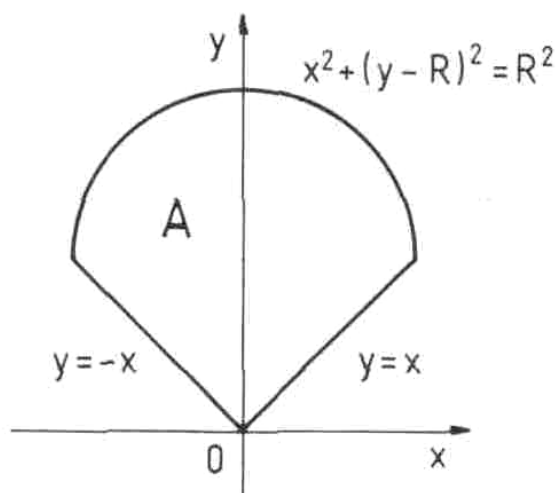
Zapišme v polárních souřadnicích obor ohraničený kružnicí

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2, \quad (901)$$

a přímkami

$$y = x, y = -x. \quad (902)$$

Obr. 42

**Řešení:**

Dosazením za x a y do rovnice kružnice dostaneme postupně

$$\begin{aligned} \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi - 2R\rho \sin \varphi + R^2 &= R^2, \\ \rho^2 - 2R\rho \sin \varphi &= 0, \\ \rho(\rho - 2R \sin \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (903)$$

Poslední rovnice má 2 řešení:

$$\begin{aligned} \rho &= 2R \sin \varphi, \\ \rho &= 0, \end{aligned} \quad (904)$$

což je polární vyjádření kružnice a jejího středu.

Hranice určené rovnicemi $y = x$, $y = -x$ se transformují do polárních souřadnic jako

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \cos \varphi, \\ \sin \varphi &= -\cos \varphi. \end{aligned} \quad (905)$$

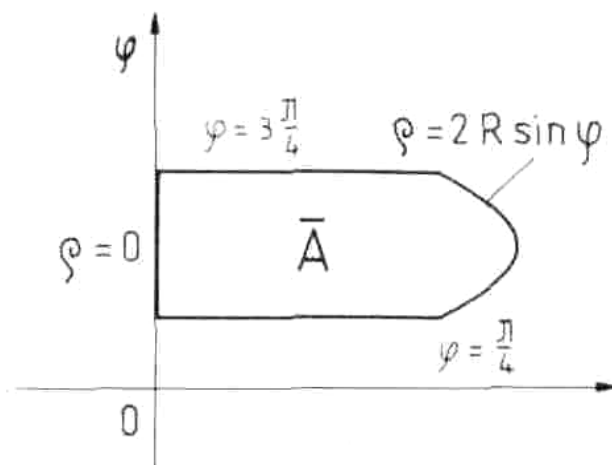
což jsou goniometrické rovnice s kořeny

$$\varphi \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\} \quad (906)$$

Hledaný obor tedy zapíšeme nerovnostmi

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &\leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, \\ 0 &\leq \rho \leq 2R \sin \varphi. \end{aligned} \quad (907)$$

Obr. 43



Výpočet dvojného integrálu v kartézských souřadnicích

Předpokládejme, že je funkce f spojitá na oboru A . Je-li tímto oborem obrazec prvního typu, potom platí

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{d(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx, \quad (908)$$

Je-li oborem A obrazec druhého typu, potom platí

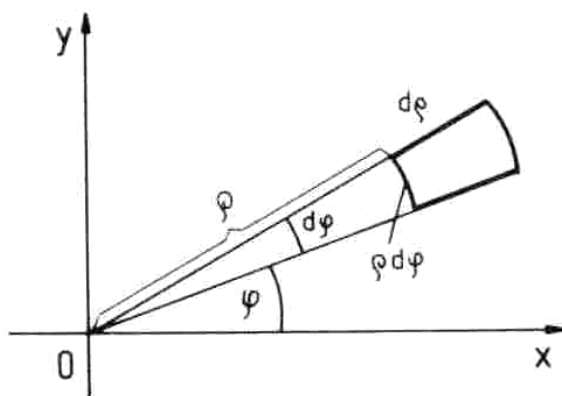
$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{l(y)}^{p(y)} f(x, y) dx dy. \quad (909)$$

Výpočet dvojného integrálu v polárních souřadnicích

Zavedením substituce (890) do vztahu (908) dostaneme okamžitě vyjádření dvojného integrálu v polárním souřadném systému

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{d(\varphi)}^{h(\varphi)} g(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{d(\varphi)}^{h(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi. \end{aligned} \quad (910)$$

Obr. 44



Fubiniho věta



Guido Fubini (1879 – 1943)

Je-li ortogonální průmět $M_p = \{\forall x \in \mathbb{R}^p \exists y \in \mathbb{R}^q : (x, y) \in M\}$ resp. $M_q = \{\forall y \in \mathbb{R}^q \exists x \in \mathbb{R}^p : (x, y) \in M\}$ množiny $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$ do prostoru \mathbb{R}^p resp. \mathbb{R}^q , pak

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \int_{\{\forall x \in \mathbb{R}^p \exists y \in \mathbb{R}^q : (x, y) \in M\}} \int_{\{\forall x \in \mathbb{R}^p : (x, y) \in M\}} f(x, y) dy dx, \quad (911)$$

resp.

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \int_{\{\forall y \in \mathbb{R}^q \exists x \in \mathbb{R}^p : (x, y) \in M\}} \int_{\{\forall x \in \mathbb{R}^p : (x, y) \in M\}} f(x, y) dx dy. \quad (912)$$

Příklad 5

Spočtěme tzv. **Laplaceův integrál**

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx. \quad (913)$$

Řešení:

Tento integrál nelze vypočítat pomocí hlavní Riemannovy věty, neboť primitivní funkce k integrandu neexistuje. Přesto je integrand integrabilní Lebesgueovsky, neboť funkce $e^{-(x^2+y^2)}$ je spojitá a kladná ve čtvrtovině $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ a lze tedy aplikovat Fubiniho větu

$$\iint_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dy dx = I^2. \quad (914)$$

Přechodem do polárních souřadnic dostáváme

$$I^2 = \iint_{\substack{0 < \rho < \infty \\ 0 < \varphi < \pi/2}} \rho e^{-\rho^2} d\rho d\varphi = \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} \rho e^{-\rho^2} d\varphi d\rho = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}, \quad (915)$$

odkud již

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (916)$$

Příklad 6

Vypočtěme tzv. **Newtonův integrál**

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (917)$$

Řešení:

Podobně, jako v předchozím příkladu, ani zde nemá integrand primitivní funkci a proto nelze přímo aplikovat Riemannovskou integraci. Uvážíme-li však, že

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : \int_0^{\infty} e^{-xy} dy = \frac{1}{x}, \quad (918)$$

můžeme (917) napsat ve tvaru

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin x \, dx dy = \int_0^{\infty} \left[-e^{-xy} \frac{\cos x + y \sin x}{1 + y^2} \right]_{x=0}^{x=\infty} dy = \int_0^{\infty} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{\pi}{2}. \quad (919)$$

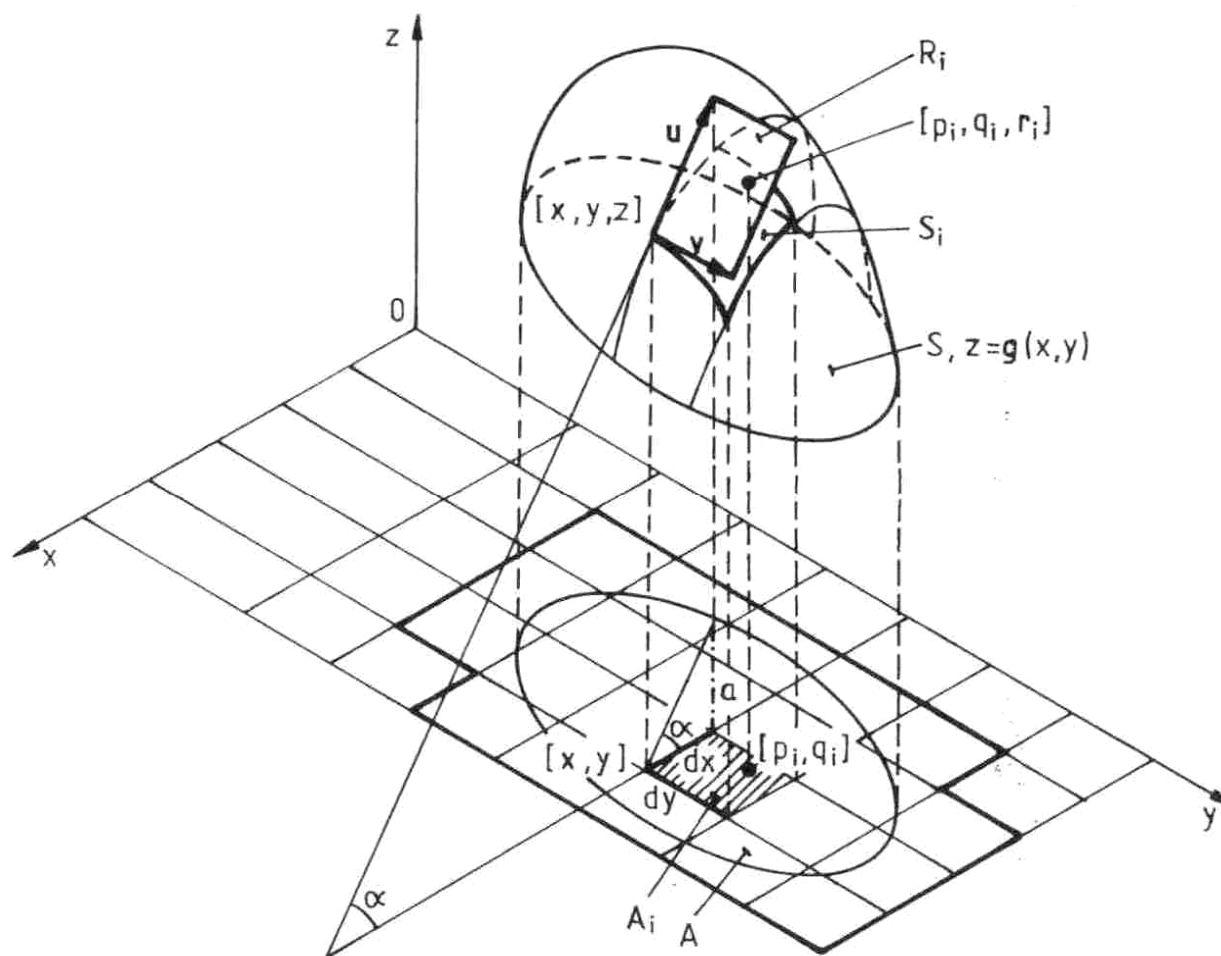
Geometrické aplikace dvojného integrálu

Uvažujme nyní obecnou plochu S zadanou funkcí $g(x, y)$, jejíž průmětem do roviny xy je obrazec A prvního, nebo druhého typu. Necht' dále funkce g a její parciální derivace g'_x, g'_y jsou spojité na A .

Potom obsah plochy S zadané rovnicí $z = g(x, y)$ je dán vztahem

$$\iint_S dS = \iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \, dx dy. \quad (920)$$

Obr. 45

**Důkaz:**

Je-li množina A obrazem prvního nebo druhého typu, pak její obsah je určen integrálem

$$S_A = \iint_A dS \quad (921)$$

kde v kartézských souřadnicích platí pro element obsahu dS

$$dS = dx dy, \quad (922)$$

v polárních souřadnicích pak

$$dS = \rho d\rho d\varphi. \quad (923)$$

V obecném případě funkce $g(x, y)$ provedme dělení množiny A_i ($i = 1, \dots, n$). Označme S_i část plochy S , jejíž průmět do roviny xy je A_i . Uvažujme A_i (element plochy A) jako obdélník o stranách dx , dy a jemu odpovídající část S_i jako element plochy S . Platí

$$\begin{aligned} S_{A_i} &= dx dy, \\ S_{S_i} &= dS. \end{aligned} \quad (924)$$

Nahradíme plochu S_i částí tečné roviny k ploše S v bodě $[x_0, y_0]$. Tato rovina je jednoznačně určena vektory \mathbf{u} , \mathbf{v} , a bodem $[x_0, y_0]$, přičemž platí

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\tan \alpha = -\frac{a}{dx} \quad (925)$$

odkud

$$a = -\frac{\partial g}{\partial x} dx \quad (926)$$

a tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \left(-dx, 0, -\frac{\partial g}{\partial x} dx \right), \\ \mathbf{v} &= \left(0, -dy, -\frac{\partial g}{\partial y} dy \right). \end{aligned} \quad (927)$$

Obsah plochy S_i se blíží obsahu rovnoběžníka $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$:

$$\begin{aligned}
 dS &= |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \left| -\frac{\partial g}{\partial x} dx dy \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} dx dy \mathbf{j} + dx dy \mathbf{k} \right| = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 (dx)^2 (dy)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 (dx)^2 (dy)^2 + (dx)^2 (dy)^2} = \\
 &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy.
 \end{aligned}
 \tag{928}$$

Pozorování:

Pro těžiště rovinného obrazce ze vztahů (921), (790) plyne jednoduchý výraz

$$T = \left(\frac{\iint_S x dS}{\iint_S dS}, \frac{\iint_S y dS}{\iint_S dS} \right).
 \tag{929}$$

Příklad 7:

Vypočtěme obsahy ploch A z příkladů (1) – (4).

Řešení:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x+1} dy dx = \int_0^1 (x+1-x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6} \tag{930}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^r \int_y^{r+\sqrt{r^2-y^2}} dy dx &= \int_0^r \left(r + \sqrt{r^2 - y^2} - y \right) dy = \\
&= \left[ry + \frac{1}{2} \left(r^2 \arcsin \frac{y}{r} + y \sqrt{r^2 - y^2} \right) - \frac{y^2}{2} \right]_0^r = \quad (931) \\
&= r^2 + \frac{\pi}{4} r^2 - \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2} \left(1 + \frac{\pi}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \rho d\rho d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (r_2^2 - r_1^2) d\varphi = \left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{3}{4} \pi (r_2^2 - r_1^2) \quad (932)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{2R \sin \varphi} \rho d\rho d\varphi &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} R^2 \sin^2 \varphi d\varphi = 2R^2 \left[\frac{2\varphi - \sin(2\varphi)}{4} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \\
&= \frac{R^2}{4} \left(\frac{3\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi R^2}{4} \quad (933)
\end{aligned}$$

Příklad 8:

Vypočtěte obsahy ploch S na povrchu sešikmeného oblouku $g(x, y) = x^2 + y$, jejichž průměty do roviny xy jsou množiny A , vymezené křivkami

a)

$$y = x, \quad y = x^2 \quad (934)$$

b)

$$\begin{aligned}\rho &= r_1, \\ \rho &= r_2, \\ \varphi &\in \left\langle 0, \frac{3\pi}{2} \right\rangle\end{aligned}\tag{935}$$

Řešení:Nejprve spočteme všechny parciální derivace funkce g :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 1.\tag{936}$$

Odtud

$$dS = \sqrt{2 + 4x^2} \, dx dy,\tag{937}$$

či v polárních souřadnicích

$$dS = \rho \sqrt{2 + 4\rho^2 \cos^2 \varphi} \, d\rho d\varphi\tag{938}$$

a)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{x^2}^x \sqrt{2 + 4x^2} \, dy dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[y \sqrt{2 + 4x^2} \right]_{x^2}^x dx = \int_0^1 (x - x^2) \sqrt{2 + 4x^2} \, dx = \\ &= \left[\frac{1}{16} \ln(\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2 + 1}) - \frac{12x^3 - 16x^2 + 3x - 8}{24} \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}} \right]_0^1 = \\ &= \frac{\ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{16} + \frac{9}{24} \sqrt{\frac{3}{2}}\end{aligned}\tag{939}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \rho \sqrt{2 + 4\rho^2 \cos^2 \varphi} \, d\rho d\varphi &= \frac{1}{12} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left[\frac{(4\rho^2 \cos^2 \varphi + 2)^{3/2}}{\cos^2 \varphi} \right]_{r_1}^{r_2} d\varphi = \\
&= \frac{1}{12} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{(4r_2^2 \cos^2 \varphi + 2)^{3/2} - (4r_1^2 \cos^2 \varphi + 2)^{3/2}}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{\varphi}{3} [r_2 - r_1]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \\
&= \frac{\pi}{2} (r_2 - r_1)
\end{aligned}
\tag{940}$$

Fyzikální zobecnění:

Uvažujme libovolnou množinu $M \subset E_3$. **Vektorovým polem** na M rozumíme funkci, která každému bodu z M přiřazuje vektor \mathbf{a} vztahem

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z) = u(x, y, z)\mathbf{i} + v(x, y, z)\mathbf{j} + w(x, y, z)\mathbf{k}. \tag{941}$$

Z výsledků předešlého odstavce přímo plyne, že integrál

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{a} \mathbf{n} \, dS &= \iint_A \mathbf{a} \left(-\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dx dy = \iint_A \left(-u \frac{\partial g}{\partial x} - v \frac{\partial g}{\partial y} + w \right) dx dy = \\
&= \iint_A \left[-u(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} - v(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} + \right. \\
&\quad \left. + w(x, y, g(x, y)) \right] dx dy
\end{aligned}
\tag{942}$$

kde jednotkový vektor ve směru normály k zadané ploše

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} = \frac{\mp \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} \mp \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \pm \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \quad (943)$$

odpovídá toku vektoru \mathbf{a} plochou S . Volbou + resp. – ve vztahu (943) vybíráme jednu ze stran plochy, a vztahem (943) je pak jednoznačně stanovena její orientace.

Je-li \mathbf{a} např. vektorem rychlosti kapaliny, pak (942) udává množství kapaliny, která proteče plochou S za jednotku času.

Příklad 9:

Určeme tok vektoru

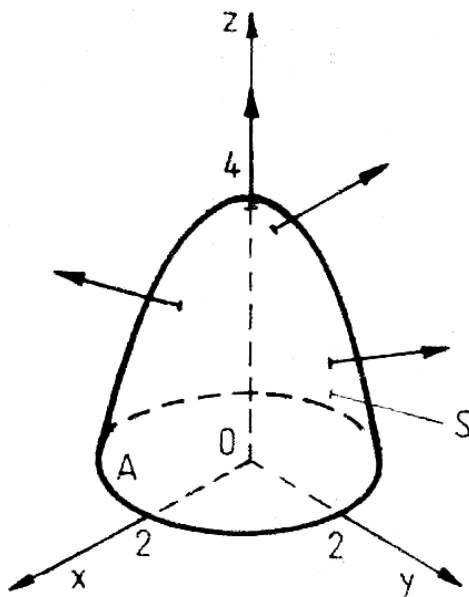
$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (944)$$

plochou S tvořenou částí paraboloidu

$$g(x, y) = 4 - x^2 + y^2, \quad (945)$$

ležící nad rovinou xy .

Obr. 46



Řešení:

Vypočteme parciální derivace

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= -2x, \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= -2y.\end{aligned}\tag{946}$$

Proto

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{a}n \, dS &= \iint_A \mathbf{a} \left(-\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dx dy = \iint_A \mathbf{a} (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}) dx dy = \\ &= \iint_A [x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (4 - x^2 - y^2)\mathbf{k}] (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}) dx dy = \\ &= \iint_A (2x^2 + 2y^2 + 4 - x^2 - y^2) dx dy = \iint_A (4 + x^2 + y^2) dx dy,\end{aligned}\tag{947}$$

kde

$$A = \{[x, y] : x^2 + y^2 \leq 4\}.\tag{948}$$

Transformací do polárních souřadnic dostaneme

$$\iint_S \mathbf{a}n \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 + \rho^2) \rho \, d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} 12 \, d\varphi = 24\pi.\tag{949}$$

b) Křivkový integrál

Uvažujme po částech hladkou křivku C zadanou rovnicí

$$C: \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}, \quad (950)$$

kde parametr s má význam délky oblouku. V každém bodě, v němž je křivka C hladká, je pak definován jednotkový tečný vektor \mathbf{t} ve směru rostoucího parametru s . Dále necht' je na otevřené množině M obsahující C zadáno vektorové pole (941). Jestliže existuje číslo

$$\int_C \mathbf{a} \, d\mathbf{r} = \int_0^\lambda \mathbf{a} \mathbf{t} \, ds, \quad 0 \leq s \leq \lambda, \quad (951)$$

nazývá se **křivkovým integrálem** vektoru \mathbf{a} na křivce C . Z definice je patrné, že je-li C^* křivka opačně orientovaná k C , pak jednotkový tečný vektor \mathbf{t} se změní na $-\mathbf{t}$ a dostaneme

$$\int_{C^*} \mathbf{a} \, d\mathbf{r} = \int_0^\lambda \mathbf{a}(-\mathbf{t}) \, ds = - \int_0^\lambda \mathbf{a} \mathbf{t} \, ds = - \int_C \mathbf{a} \, d\mathbf{r}. \quad (952)$$

Výpočet křivkového integrálu

V kapitole o Riemannově integrálu jsme si jako jednu z interpretací

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad (953)$$

uvedli práci síly na úsečce reprezentované intervalem $\langle a, b \rangle$ reálné osy. Naším úkolem bude nyní zobecnit tuto úlohu na výpočet práce síly, působící po libovolné křivce, zadané rovnicí

$$C: \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in \langle a, b \rangle. \quad (954)$$

Pro jednotkový tečný vektor \mathbf{t} platí

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}, \quad (955)$$

kde

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Odtud srovnáním (954), (775), (941) a (951) dostáváme

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{a} \, d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{a}(x(t), y(t), z(t)) \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} |\mathbf{r}'(t)| \, dt = \\ &= \int_a^b \mathbf{a}(x(t), y(t), z(t)) \mathbf{r}'(t) \, dt. \end{aligned} \quad (956)$$

Po rozepsání pak máme

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{a}(x(t), y(t), z(t)) \mathbf{r}'(t) \, dt &= \\ &= \int_a^b \left[u(x(t), y(t), z(t))\mathbf{i} + v(x(t), y(t), z(t))\mathbf{j} + w(x(t), y(t), z(t))\mathbf{k} \right] \cdot \\ &\cdot \left[x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \right] \, dt, \end{aligned} \quad (957)$$

Odkud

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{a} \, d\mathbf{r} &= \\
&= \int_a^b \left[u(x(t), y(t), z(t))x'(t) + v(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \right. \\
&\quad \left. + w(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right] dt = \int_C u \, dx + v \, dy + w \, dz.
\end{aligned}
\tag{958}$$

Ve vztahu (958) lze formálně psát v integrandu

$$u(x, y, z) + v(x, y, z) + w(x, y, z), \tag{959}$$

kde

$$\begin{aligned}
x &= x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \\
dx &= x'(t)dt, \quad dy = y'(t)dt, \quad dz = z'(t)dt,
\end{aligned}
\tag{960}$$

čímž je zdůvodněno označení psané napravo v (958). Podobně platí rovnost

$$\int_C \mathbf{a} \, d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{a} \, \mathbf{r}'(t) \, dt. \tag{961}$$

Výpočet křivkového integrálu, jak vidno z (958), tedy vede k úloze vypočítat Riemannův integrál. Z aditivity Riemannova integrálu okamžitě plyne též aditivita křivkového integrálu:

$$\int_C \mathbf{a} \, d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \mathbf{a} \, d\mathbf{r}. \tag{962}$$

Příklad 1:

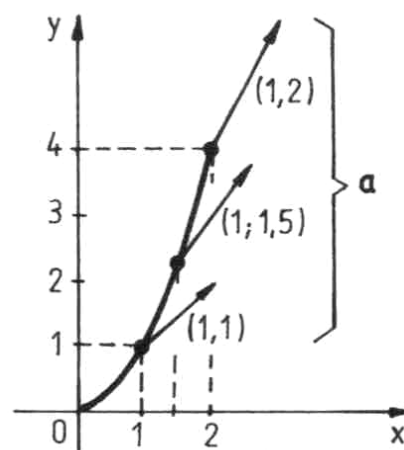
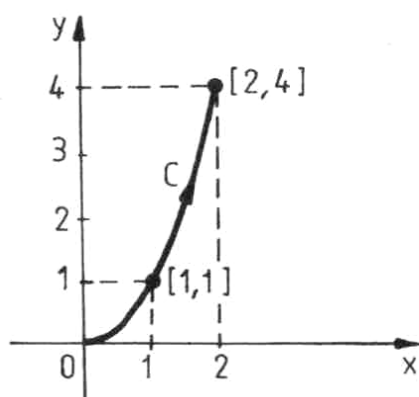
Vypočtěme práci vektoru

$$\mathbf{F} = \mathbf{i} + x\mathbf{j} \quad (963)$$

po křivce

$$C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad t \in \langle 1, 2 \rangle \quad (964)$$

Obr. 47

**Řešení:**

$$\mathbf{F} = \mathbf{i} + t\mathbf{j},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}, \quad (965)$$

odkud

$$\int_C \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = \int_1^2 (\mathbf{i} + t\mathbf{j})(\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}) \, dt = \int_1^2 (1 + 2t^2) \, dt = \left[t + \frac{2t^3}{3} \right]_1^2 = \frac{17}{3} \text{ J.}$$

(966)

Příklad 2:

Vypočtěme práci silového pole

$$\mathbf{F} = 4y\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad (967)$$

po křivce

$$C : \mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i} \cos t + 4\mathbf{j} \sin t + 2t\mathbf{k}, \quad t \in \langle 1, 2\pi \rangle. \quad (968)$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= 16\mathbf{i} \sin t + 8\mathbf{j} \cos t + \mathbf{k}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} &= -4\mathbf{i} \sin t + 4\mathbf{j} \cos t + 2\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (969)$$

odkud

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \, d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (16\mathbf{i} \sin t + 8\mathbf{j} \cos t + \mathbf{k})(-4\mathbf{i} \sin t + 4\mathbf{j} \cos t + 2\mathbf{k}) \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-64 \sin^2 t + 32 \cos^2 t + 2) \, dt = -28\pi \text{ J}. \end{aligned} \quad (970)$$

Příklad 3:

Vypočtěme práci silového pole

$$\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} + 3z^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}, \quad (971)$$

po dráze

$$x = 2y = 4z, \quad (972)$$

mezi dvěma body

$$\begin{aligned} P_1 &= [0, 0, 0], \\ P_2 &= [4, 2, 1]. \end{aligned} \quad (973)$$

Řešení:

$$\begin{aligned} A &= \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = \int_0^4 2xz \, dx + \int_0^2 3z^2 \, dy + \int_0^1 y^2 \, dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 x^2 \, dx + \frac{3}{4} \int_0^2 y^2 \, dy + 4 \int_0^1 z^2 \, dz = \frac{1}{6} [x^3]_0^4 + \frac{1}{4} [y^3]_0^2 + \frac{4}{3} [z^3]_0^1 = \\ &= \frac{32}{3} + 2 + \frac{4}{3} = 14 \text{ J.} \end{aligned} \quad (974)$$

Těžiště obecné křivky:

Jinou z možností využití křivkového integrálu je výpočet těžiště obecné prostorové křivky, pro nějž zřejmě platí vztah (srov. (790)):

$$T = \left(\frac{\int_C xf(x, y, z) \, ds}{\int_C f(x, y, z) \, ds}, \frac{\int_C yf(x, y, z) \, ds}{\int_C f(x, y, z) \, ds}, \frac{\int_C zf(x, y, z) \, ds}{\int_C f(x, y, z) \, ds} \right), \quad (975)$$

kde f je hustotní pole křivky.

Konzervativní vektorová pole

Definice:

Vektorové pole (941) na M nazveme konzervativním (potenciálovým), jestliže na M existuje spojitě diferencovatelná funkce f splňující rovnosti

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= u, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= v, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= w.\end{aligned}\tag{ 976 }$$

Věta o konzervativitě pole:

Předpokládejme, že funkce $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ mají spojitě parciální derivace na množině M , která je otevřeným kruhem. Pak vektorové pole $\mathbf{a} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ je konzervativní na M , právě když ve všech bodech množiny M platí rovnost

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.\tag{ 977 }$$

Důkaz:

Podle předpokladu věty existuje potenciálová funkce f , pro níž

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}.\tag{ 978 }$$

Potom

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (979)$$

(První výraz ve jmenovateli vyšších parciálních derivací říká, podle které proměnné se derivovalo při první parciální derivaci, druhý výraz obsahuje proměnnou, podle které se derivovalo při druhé parciální derivaci, atd.)

Ze spojitosti u'_y, v'_x vyplývá $f''_{xy} = f''_{yx}$ a tudíž vskutku

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (980)$$

Zobecnění:

Předpokládejme, že funkce $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$ mají spojitě parciální derivace na množině M , která je otevřenou koulí. Pak vektorové pole $\mathbf{a} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ je konzervativní na M , právě když ve všech bodech množiny M platí rovnosti

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (981)$$

Zavedeme-li vektorový operátor zvaný **rotace vektorového pole** předpisem

$$\text{rot } \mathbf{a} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}, \quad (982)$$

pak vidíme, že vektorové pole $\mathbf{a} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ je konzervativní na M , právě když ve všech bodech množiny M platí rovnost

$$\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (983)$$

Příklad 4:

Nalezněme potenciál pole o intenzitě

$$\mathbf{E} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j} \quad (984)$$

Řešení:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x, \quad (985)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x.$$

Pole \mathbf{E} je tedy potenciálové a proto existuje jeho potenciál φ daný rovnicí

$$\mathbf{E} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j}. \quad (986)$$

(Připomeňme si, že potenciál pole je mírou potenciální energie testovací částice v tomto poli a ta je integrálem intenzity pole. Intenzita pole je pak mírou síly, jež v daném poli působí na testovací částici. Proto je parciální derivace potenciálu rovna intenzitě pole podél vybrané souřadnice).

Odtud plyne soustava integrálních rovnic

$$\varphi = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \int 2xy dx = x^2 y + g(y) + c, \quad (987)$$

$$\varphi = \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \int (x^2 - y) dy = x^2 y - \frac{y^2}{2} + h(x) + c.$$

Dosazením z druhé rovnice do první vidíme, že

$$g(y) = -\frac{y^2}{2}, \quad (988)$$

$$h(x) = 0,$$

odkud již plyne hledaný tvar potenciálu φ pole \mathbf{E} :

$$\varphi(x, y) = x^2 y - \frac{y^2}{2} + c. \quad (989)$$

Věta o nezávislosti na integrační cestě:

Uvažujme množinu $M \subset E_3$, která je otevřenou koulí, dále křivku

$$C: \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in \langle a, b \rangle \quad (990)$$

ležící v M a vektorové pole

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z) = u(x, y, z)\mathbf{i} + v(x, y, z)\mathbf{j} + w(x, y, z)\mathbf{k} \quad (991)$$

kde u, v jsou funkce spojité v M . Jestliže \mathbf{a} je konzervativní pole, pak platí

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{a} \, d\mathbf{r} &= f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a)) = \\ &= \left[f(x, y, z) \right]_{[x(a), y(a), z(a)]}^{[x(b), y(b), z(b)]}. \end{aligned} \quad (992)$$

Důkaz:

Z předpokladu věty plyne existence potenciálové funkce f (potenciálu), pro níž

$$\mathbf{a} = \text{grad } f \equiv \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (993)$$

Operátor grad f , přiřazující skalární funkci f vektorovou funkci \mathbf{a} , nazýváme **gradientem funkce f** . Blíže se s jeho vlastnostmi seznámíme v kapitole o směrové derivaci. Dostáváme tak

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{a} \, d\mathbf{r} &= \int_a^b \left[f'_x(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + f'_y(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + \right. \\ &\quad \left. + f'_z(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right] dt = \int_a^b \frac{d}{dt} [f(x(t), y(t), z(t))] dt = \\ &= [f(x, y, z)]_{[x(a), y(a), z(a)]}^{[x(b), y(b), z(b)]}, \end{aligned} \quad (994)$$

kde jsme užili větu o derivaci kompozice funkcí více proměnných,

$$f = h(g_1, g_2, \dots, g_p), \quad (995)$$

která je přímočarým zobecněním věty o kompozici funkcí jedné proměnné:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(A) = \sum_{k=1}^p \left[\frac{\partial}{\partial y_k} h(B) \frac{\partial}{\partial x_j} g_k(A) \right], \quad (996)$$

kde

$$B = [g_1(A), g_2(A), \dots, g_p(A)]. \quad (997)$$

Důsledek:

Jsou-li splněny předpoklady věty o nezávislosti na integrační cestě pro jednoduchou uzavřenou křivku C a vektorové pole \mathbf{a} , pak platí:

$$\int_C \mathbf{a} \, d\mathbf{r} = 0. \quad (998)$$

Důkaz:

Zvolme na křivce C různé body A, B a rozdělme křivku C na křivky C_1, C_2 ,

$$C = C_1 \cup C_2 \quad (999)$$

jak jest to znázorněno na obr. 48. Podle (962) platí

$$\int_C \mathbf{a} \, d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{a} \, d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{a} \, d\mathbf{r}. \quad (1000)$$

Z (952) dále plyne, že

$$\int_{C_2^*} \mathbf{a} \, d\mathbf{r} = - \int_{C_2} \mathbf{a} \, d\mathbf{r}. \quad (1001)$$

Podle věty o nezávislosti na integrační cestě je tedy

$$\int_{C_2^*} \mathbf{a} \, d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{a} \, d\mathbf{r}, \quad (1002)$$

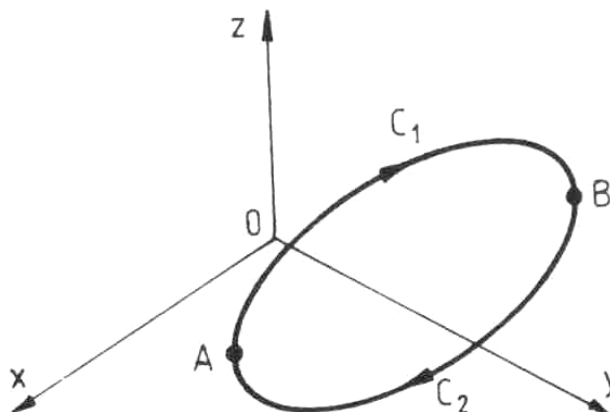
neboli

$$\int_{C_1} \mathbf{a} \, d\mathbf{r} - \int_{C_2^*} \mathbf{a} \, d\mathbf{r} = 0. \quad (1003)$$

Odtud máme

$$0 = \int_{C_1} \mathbf{a} \, d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{a} \, d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{a} \, d\mathbf{r}. \quad (1004)$$

Obr. 48



Definice:

Integrál vektoru \mathbf{a} po uzavřené křivce značíme

$$\oint_C \mathbf{a} \, d\mathbf{r} \quad (1005)$$

a nazýváme jej **cirkulace vektoru \mathbf{a}** . Podle poslední věty tedy platí, že cirkulace vektoru \mathbf{a} v konzervativním poli je nulová:

$$\oint_C \mathbf{a} \, d\mathbf{r} = 0. \quad (1006)$$

Příklad 5:

Vypočtěme

$$\oint_C ydx + xdy + zdz \quad (1007)$$

po kružnici

$$C : \mathbf{r}(t) = \mathbf{i}r \cos t + \mathbf{j}r \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (1008)$$

Řešení:

Všechny parciální derivace vektorového pole

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}y + \mathbf{j}x + \mathbf{k}z \quad (1009)$$

jsou rovny nule, takže

$$\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (1010)$$

Pole \mathbf{a} je tedy potenciálové. Integrační cestou je uzavřená křivka, odkud již plyne, že

$$\oint_C ydx + xdy + zdz = 0. \quad (1011)$$

Příklad 6:

Vypočtěme

$$\oint_C (y^3 + 1)dx + (3xy^2 + 1)dy, \quad (1012)$$

kde C je libovolná jednoduchá uzavřená křivka.

Řešení:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= y^3 + 1, \\ v(x, y) &= 3xy^2 + 1. \end{aligned} \tag{1013}$$

Odtud

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= 3y^2, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 3y^2. \end{aligned} \tag{1014}$$

pole

$$\mathbf{a} = (y^3 + 1)\mathbf{i} + (3xy^2 + 1)\mathbf{j} \tag{1015}$$

je tedy potenciálové a proto platí

$$\oint_C (y^3 + 1)dx + (3xy^2 + 1)dy = 0 \tag{1016}$$

Definice:

Orientaci uzavřené křivky nazveme kladnou, resp. zápornou, jestliže její obíhání volíme proti směru, resp. po směru hodinových ručiček.

Greenova věta



George Green (1793 – 1841)

Uvažujme množinu $M \subset E_2$, jejíž hranici tvoří jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka C . Předpokládejme dále, že funkce $u, v, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ jsou spojité na M i C . Potom platí

$$\oint_C u(x, y) dx + v(x, y) dy = \iint_M \left[\frac{\partial}{\partial x} v(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \right] dx dy, \quad (1017)$$

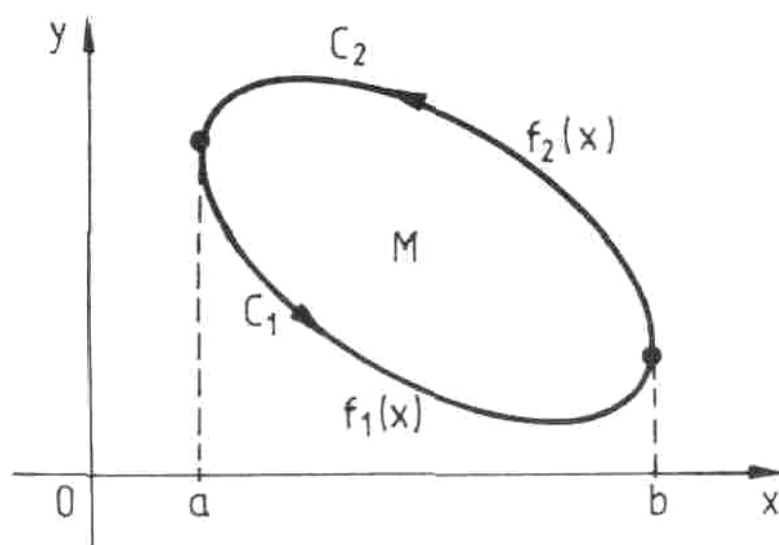
kde C je orientovaná kladně.

Důkaz:

Nechť je M kupř. obrazcem prvního typu:

$$M : \{[x, y]; a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}. \quad (1018)$$

Obr. 49



V tomto případě lze parametrizovat

$$\begin{aligned} C_1 : x = t, y = f_1(t), \quad t \in \langle a, b \rangle, \\ C_2^* : x = t, y = f_2(t), \quad t \in \langle a, b \rangle. \end{aligned} \quad (1019)$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} \oint_C u(x, y) dx &= \int_{C_1} u(x, y) dx - \int_{C_2^*} u(x, y) dx = \\ &= \int_a^b u(t, f_1(t)) dt - \int_a^b u(t, f_2(t)) dt = \\ &= \int_a^b [u(t, f_1(t)) - u(t, f_2(t))] dt. \end{aligned} \quad (1020)$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \iint_M \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) dx dy &= \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) dy dx = \int_a^b [u(x, y)] dx = \\ &= \int_a^b [u(x, f_2(x)) - u(x, f_1(x))] dx. \end{aligned} \quad (1021)$$

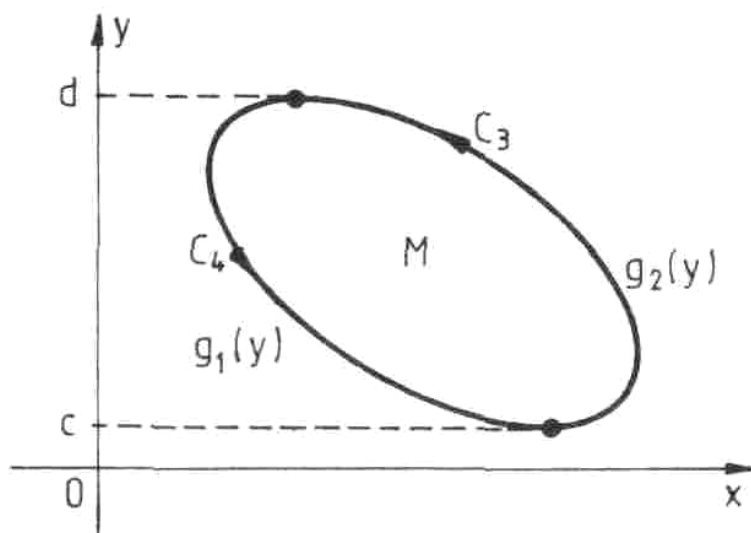
Z (1020) a (1021) vyplývá, že

$$\oint_C u(x, y) dx = - \iint_M \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) dx dy. \quad (1022)$$

Zcela analogickým způsobem dojdeme k závěru, že rovněž

$$\oint_C v(x, y) dx = - \iint_M \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) dx dy. \quad (1023)$$

Obr. 50



Odtud již plyne dokazovaná rovnost

$$\oint_C u(x, y) dx + v(x, y) dy = \iint_M \left[\frac{\partial}{\partial x} v(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \right] dx dy. \quad (1024)$$

Důsledek:

Obsah rovinného obrazce ohraničeného uzavřenou křivkou C , je roven číslu

$$S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx. \quad (1025)$$

Důkaz:

Z teorie dvojného integrálu víme, že obsah množiny M je

$$S = \iint_M dx dy = \iint_M \left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right] dx dy. \quad (1026)$$

Odtud

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{1}{2}, & u'_y &= -\frac{1}{2}, \\ v &= \frac{x}{2}, & u &= -\frac{y}{2}. \end{aligned} \quad (1027)$$

Dosazením do Greenovy věty (1017) odtud plyne

$$S = \iint_M dx dy = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx. \quad (1028)$$

Příklad 7:

Pomocí Greenovy věty vypočtěme obsah kružnice poloměru r .

Řešení:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} dx dy = \frac{1}{2} \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dx dy = \frac{1}{2} \int_{-r}^r [x]_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dy = \\
 &= \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - y^2} dy = \left[r^2 \arcsin \frac{y}{r} + y \sqrt{r^2 - y^2} \right]_{-r}^r = r^2 \left[\arcsin \frac{y}{r} \right]_{-r}^r = \\
 &= r^2 \left[\arcsin(-1) - \arcsin(1) \right] = r^2 \pi \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) = \pi r^2.
 \end{aligned}$$

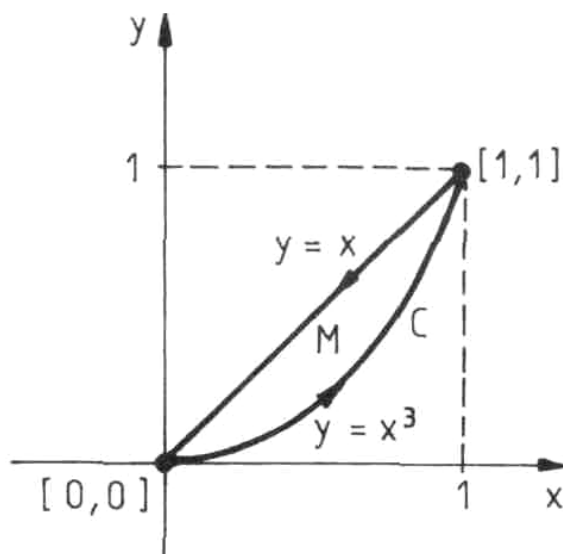
(1029)

Příklad 8:

Vypočtěme

$$\oint_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^3) dy, \quad (1030)$$

Obr. 51



kde C je kladně orientovaná uzavřená křivka skládající se z části kubické paraboly $y = x^3$ a úsečky $y = x$.

Řešení:

Předpoklady Greenovy věty jsou zřejmě splněny. Dosazením do (1017) vychází

$$\begin{aligned} \oint_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^3) dy &= \iint_M (3x^2 + 3y^2 - 3y^2) dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_{x^3}^x 3x^2 dy dx = \int_0^1 [3x^2 y]_{x^3}^x = \int_0^1 (3x^3 - 3x^5) dx = \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^6}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(1031)

Z příkladu je patrné, že není-li křivka C zadána v parametrickém tvaru, není ji nutno pro potřeby výpočtu dvojného integrálu na pravé straně (1017) na tento tvar převádět.

Stokesova věta



George Gabriel Stokes (1819 – 1903)

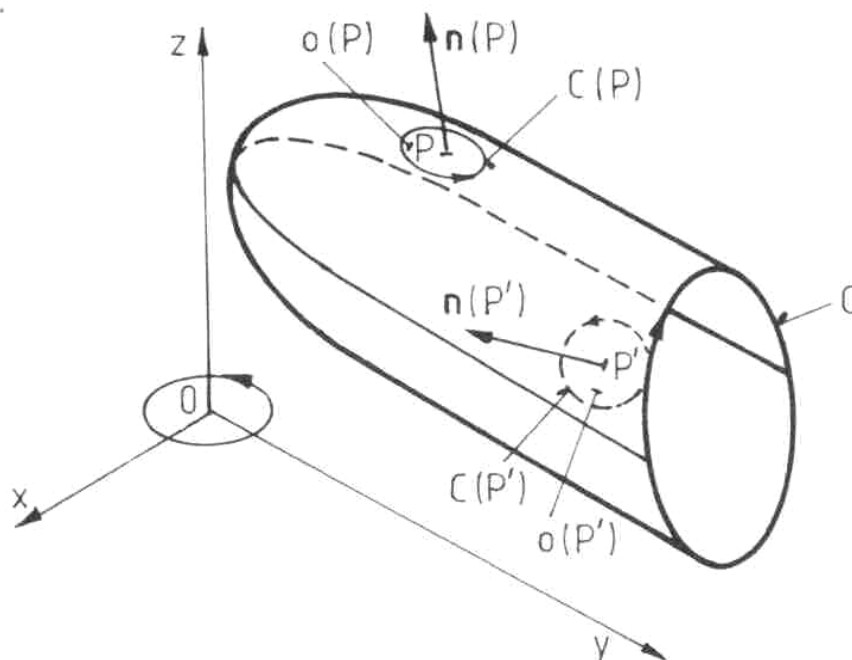
Nechť S je orientovaná plocha s okrajem tvořeným jednoduchou, po částech hladkou uzavřenou křivkou C . Dále nechť je zadáno vektorové pole (941), přičemž u , v , w mají spojitě parciální derivace na otevřené množině obsahující S a C . Pak platí

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{a} \, dS = \oint_C \mathbf{a} \, d\mathbf{r}, \quad (1032)$$

kde křivka C je orientována ve smyslu orientace plochy S . Jinými slovy, tok vektoru $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ plochou S je roven cirkulaci vektoru \mathbf{a} po jejím okraji. Speciálně, je-li pole \mathbf{a} konzervativní, pak $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$ a tedy rovněž

$$\oint_C \mathbf{a} \, d\mathbf{r} = 0. \quad (1033)$$

Obr. 52

**Důkaz:**

Nechť uzavřená křivka C tvoří hranici plochy S . Na této ploše můžeme opět vést dělicí křivky, vytvářet soustavu dílčích ploch, počítat cirkulaci podél jejich hranic a sčítat je. Příspěvky k cirkulacím podél společných hranic dvou sousedních ploch se vzájemně vyruší, neboť zachováme-li jednotný smysl obcházení křivek, budeme takovou společnou hranici obcházet vždy v opačném směru. Sumární cirkulace bude tedy rovna právě původní cirkulaci podél křivky C :

$$\sum_{i=1}^n \oint_{C_i} \mathbf{a}_i d\mathbf{r}_i = \oint_C \mathbf{a} d\mathbf{r} \equiv \Gamma. \quad (1034)$$

Zvolíme v prostoru bod P o souřadnicích x, y, z a povedeme jím rovinu libovolné orientace. V této rovině vymezení uzavřenou křivku malých rozměrů obklopující bod P . Plochu omezenou touto křivkou označíme ΔS , cirkulaci podél této křivky $\Delta\Gamma$. Budeme nyní dělit tuto plošku na menší části a vyčleníme posloupnost plošek obsahujících bod P . Uvažujme limitu

$$\lim_{\Delta S_i^{(P)} \rightarrow 0} \frac{\Delta\Gamma_i^{(P)}}{\Delta S_i^{(P)}}. \quad (1035)$$

Pokud tato limita existuje, bude závislá na na volbě orientace roviny procházející bodem P , neboli na směru normály k elementární plošce, na jejíž hranici cirkulaci určujeme. Limitu (1035) tak můžeme považovat za projekci určitého vektoru do směru normály k ploše.

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{a} = \lim_{\Delta S_i^{(P)} \rightarrow 0} \frac{\Delta\Gamma_i^{(P)}}{\Delta S_i^{(P)}}. \quad (1036)$$

Projekce vektoru $\text{rot } \mathbf{a}$ do daného směru tedy představuje poměr cirkulace pole \mathbf{a} po obvodu malé kolmé plošky k velikosti této plošky. Vztah (1034) nyní upravíme do tvaru

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{a} d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \Delta\Gamma_i = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta\Gamma_i}{\Delta S_i} \Delta S_i. \quad (1037)$$

Pro každý bod P na ploše S můžeme vytvořit posloupnost neomezeně se zmenšujících dílčích plošek tento bod stále obsahujících, V limitě

přejde tedy podíl $\frac{\Delta\Gamma_i}{\Delta S_i}$ v $\text{rot } \mathbf{a}$ a suma na pravé straně (1037)

v integrál přes celou plochu S :

$$\oint_C \mathbf{a} \, d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{a} \, d\mathbf{S}. \quad (1038)$$

Příklad 9:

Ověřme platnost Stokesovy věty pro vektorové pole

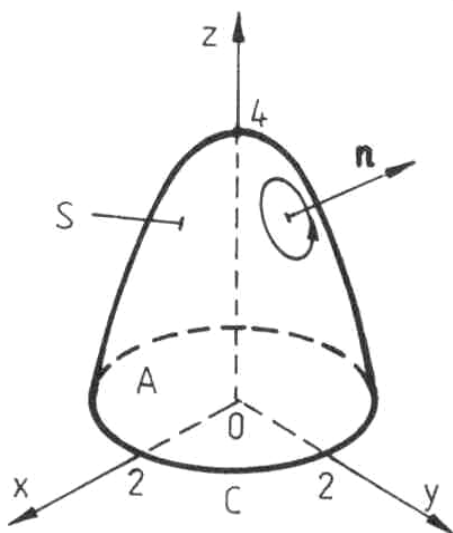
$$\mathbf{a}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k} \quad (1039)$$

a plochu S tvořenou částí paraboloidu

$$z = 4 - x^2 - y^2 \quad (1040)$$

odříznutou rovinou $z = 0$ a orientovanou vektorem \mathbf{n} podle obr. 53.

Obr. 53



Řešení:

Vypočteme rotaci vektorového pole \mathbf{a} :

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = 2y\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}. \quad (1041)$$

Pro plochu $g(x, y, z) = 4 - x^2 - y^2$ vektor

$$-\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad (1042)$$

souhlasí se zadanou orientací plochy a tedy

$$\mathbf{n} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}. \quad (1043)$$

Potom

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_A (2y\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dx dy = \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4xy + 4y + 1) \, dx dy = 4\pi. \end{aligned} \quad (1044)$$

Nyní spočteme křivkový integrál. Parametrizací C dostaneme

$$C: \mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} \cos t + 2\mathbf{j} \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (1045)$$

Pak

$$\int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_C 2z \, dx + x \, dy + y^2 \, dz = 4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = [2t + \sin(2t)]_0^{2\pi} = 4\pi. \quad (1046)$$

c) Úvod do teorie trojného integrálu

Zobecněním dvojného integrálu je tzv. **objemový**, čili **trojný integrál**, popř. výčetné integrály, definované v prostorech o větším počtu dimenzí. Vzájemný vztah mezi objemem prostoru určeným trojným integrálem, uzavřenou plochou obklopující tento objem a zadaným vektorovým polem, které touto plochou protéká, popisuje tzv. **Gaussova – Ostrogradského věta**.

Nechť je dán v prostoru xyz kvádr

$$P = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \langle a_3, b_3 \rangle. \quad (1047)$$

Zvolme dělení intervalů $\langle a_l, b_l \rangle$ tj. množin

$$\begin{aligned} \{a_1 = x_0, x_1, \dots, x_m = b_1\}, \\ \{a_2 = y_0, y_1, \dots, y_n = b_2\}, \\ \{a_3 = z_0, z_1, \dots, z_p = b_3\}, \end{aligned} \quad (1048)$$

s kroky

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_i - x_{i-1}, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \Delta y_i &= y_i - y_{i-1}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ \Delta z_i &= z_i - z_{i-1}, \quad (i = 1, 2, \dots, p), \end{aligned} \quad (1049)$$

množinu bodů

$$\tau = \left\{ \left[x_i, y_j, z_k \right] \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (1050)$$

nazveme síť s kroky (1049). Ta je tvořena množstvím mn podobných kvádrů

$$P_{ijk} = \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle \times \langle z_{k-1}, z_k \rangle \quad (1051)$$

o stranách (1049). Zvolené síti dále přiřadíme číslo

$$h(\tau) = \max_{i,j,k} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2 + (\Delta z_k)^2} \quad (1052)$$

odpovídající délce nejdelší tělesové úhlopříčky kvádrů P_{ijk} . V každém kvádru P_{ijk} dále zvolíme libovoný bod

$$U_{ijk} = [u_i, v_j, w_k] \quad (1053)$$

a utvoříme integrální součet

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p f(U_{ijk}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k. \quad (1054)$$

Jestliže

$$\begin{aligned} & \exists I \in \mathbb{R} : (\forall q \in \mathbb{R} \exists \bar{h} \in \mathbb{R}, \bar{h} > 0 : \forall h(\tau) < \bar{h}, \forall U_{ijk} \in P_{ijk}, \\ & (i = 1, 2, \dots, m), (j = 1, 2, \dots, n), (k = 1, 2, \dots, p) \\ & : \left. \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p f(U_{ijk}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k - I \leq q \right), \end{aligned} \quad (1055)$$

kde q je libovolně malé číslo, pak číslo I značíme

$$I \equiv \iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz \quad (1056)$$

a říkáme, že funkce f je integrabilní na kvádru Q .

Na obecné omezené množině $B \subset E_3$ definujeme trojný integrál funkce f tak, že zvolíme kvádr Q , aby platilo $B \subset Q$. Dále definujeme na Q funkci g takovou, že

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= f(x, y, z) \quad \text{pro } (x, y, z) \in B, \\ g(x, y, z) &= 0 \quad \text{pro } (x, y, z) \notin B. \end{aligned} \quad (1057)$$

Říkáme, že funkce f je integrabilní na množině B , jestliže existuje funkce g integrabilní na kvádru Q a trojným integrálem funkce f na A je integrál funkce g na Q :

$$\iiint_B f(x, y) dx dy = \iiint_Q g(x, y) dx dy. \quad (1058)$$

Integrál funkce f na množině A pak nezávisí na volbě kvádru Q .

Integrační obory v kartézských souřadnicích

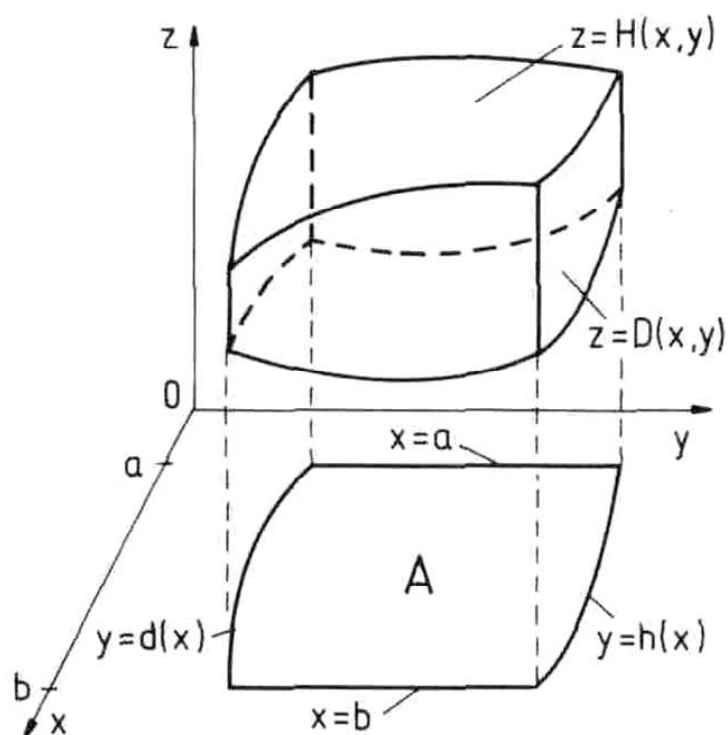
Obrazce prvního typu jsou množiny bodů $[x, y]$ ohraničené grafy funkcí

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b, \\ d(x) &\leq y \leq h(x), \\ D(x, z) &\leq z \leq H(x, z). \end{aligned} \quad (1059)$$

Obrazce druhého typu jsou množiny bodů $[x, y]$ ohraničené grafy funkcí

$$\begin{aligned} c &\leq y \leq d, \\ l(y) &\leq x \leq p(y), \\ D(x, y) &\leq z \leq H(x, y). \end{aligned} \quad (1060)$$

Obr. 54



Integrační obory v cylindrických souřadnicích

jsou množiny bodů $[\rho, \varphi, z]$ ohraničené grafy funkcí

$$\alpha \leq \varphi \leq \beta,$$

$$d(\varphi) \leq \rho \leq h(\varphi), \quad (1061)$$

$$D(\rho, \varphi) \leq z \leq H(\rho, \varphi).$$

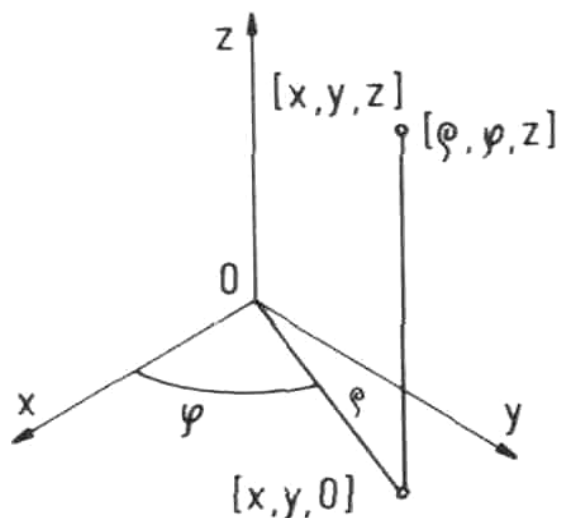
Připomeňme, že vztah mezi cylindrickou a kartézskou soustavou souřadnic je dán vztahem plynoucím z definice goniometrických funkcí na jednotkovém válci:

$$x = \rho \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \varphi, \quad (1062)$$

$$z = z.$$

Obr. 55



Integrační obory ve sférických souřadnicích

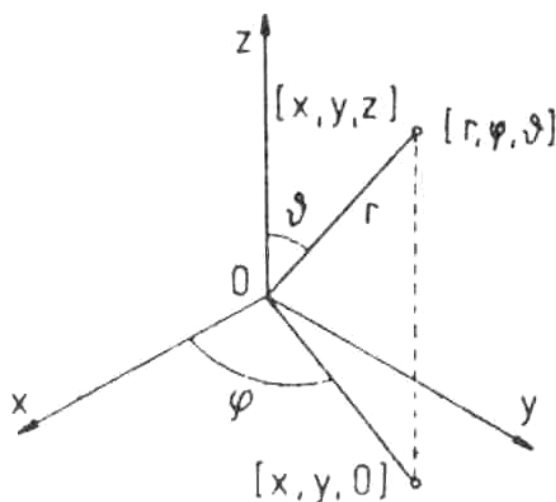
jsou množiny bodů $[r, \varphi, \vartheta]$ ohraničené grafy funkcí

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \varphi \leq \beta, \\ \gamma &\leq \vartheta \leq \delta, \\ D(\varphi, \vartheta) &\leq r \leq H(\varphi, \vartheta), \end{aligned} \tag{1063}$$

Připomeňme, že vztah mezi sférickou a kartézskou soustavou souřadnic je dán vztahem plynoucím z definice goniometrických funkcí na jednotkové kouli:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \vartheta, \\ y &= r \sin \varphi \sin \vartheta, \\ z &= r \cos \vartheta. \end{aligned} \tag{1064}$$

Obr. 56



Integrační obory v eliptických souřadnicích

Jedná se o zobecněný tvar sférických souřadnic. Vztah mezi eliptickou a kartézskou soustavou souřadnic je dán vztahem

$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi \cos \vartheta, \\ y &= b \sin \varphi \cos \vartheta, \\ z &= c \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (1065)$$

Objem a těžiště obecného tělesa

Je-li množinou B těleso mezi grafy spojitých funkcí, její objem V_B je roven

$$V_B = \iiint_B dV, \quad (1066)$$

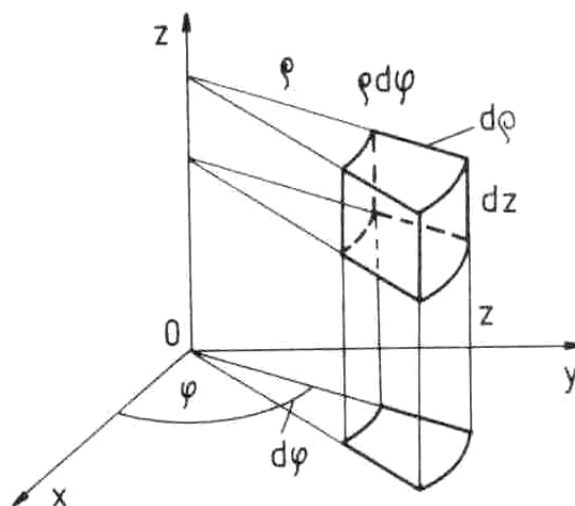
kde v kartézských souřadnicích platí

$$dV = dx dy dz, \quad (1067)$$

v cylindrických souřadnicích platí

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz, \quad (1068)$$

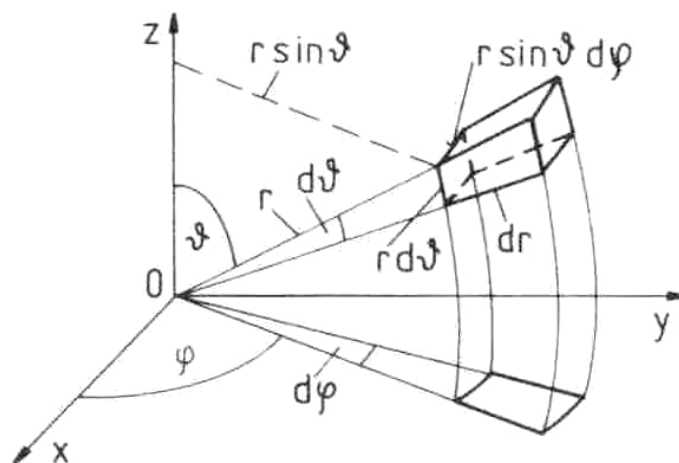
Obr. 57



ve sférických souřadnicích platí

$$dV = r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta. \quad (1069)$$

Obr. 58



a v eliptických souřadnicích platí

$$dV = abc \cos \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (1070)$$

Věta:

Je-li D nezáporná spojitá funkce na A , vyjadřuje dvojný integrál

$$\iint_A [H(x, y) - D(x, y)] dS \quad (1071)$$

objem tělesa ohraničeného sdola a shora plochami

$$\begin{aligned} z &= D(x, y), \\ z &= H(x, y), \end{aligned} \quad (1072)$$

a válcovou plochou, jejíž řídící křivkou je hranice oboru A .

Důkaz:

Předpokládejme, že funkce f je spojitá na oboru $B \subset E_3$. Je-li obor B těleso určené nerovnostmi

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b, \\ d(x) &\leq y \leq h(x), \\ D(x, y) &\leq z \leq H(x, y), \end{aligned} \quad (1073)$$

potom můžeme psát

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{d(x)}^{h(x)} \int_{D(x, y)}^{H(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx. \quad (1074)$$

Uřídíme objem tělesa B mezi grafy spojitých funkcí $z = D(x, y)$,
 $z = H(x, y)$, $(x, y) \in A$, $D \leq H$.

$$V_B = \iiint_B dV = \iint_A \left(\int_{D(x,y)}^{H(x,y)} dz \right) dx dy = \iint_A [z]_{D(x,y)}^{H(x,y)} dx dy = \quad (1075)$$

$$= \iint_A [H(x, y) - D(x, y)] dS.$$

Příklad 1:

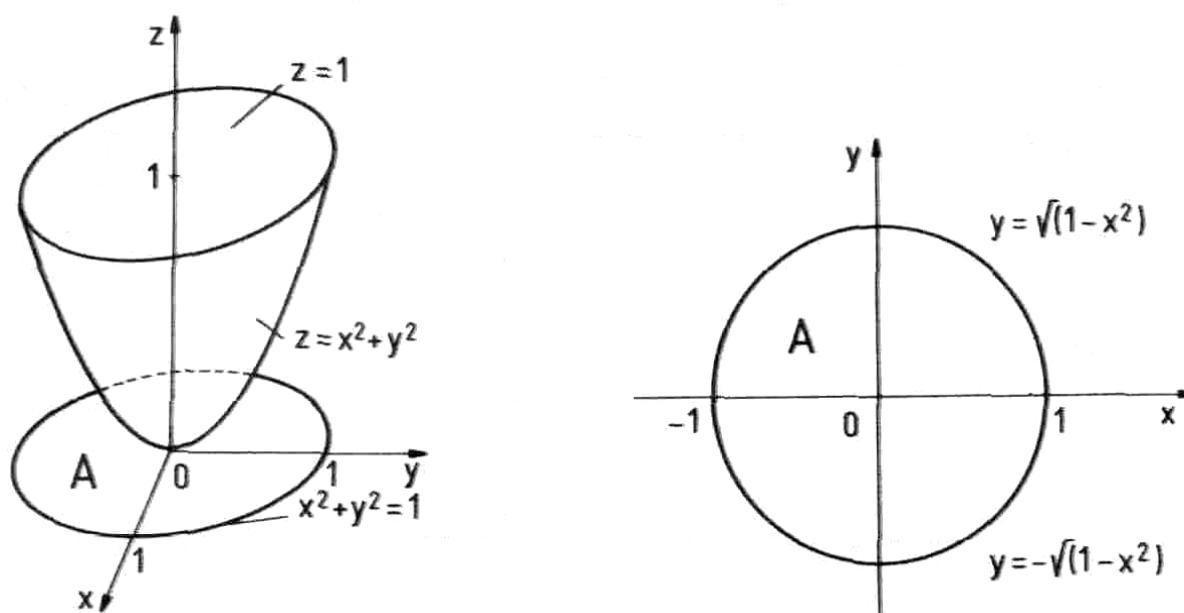
Vypočtete objem rotačního paraboloidu

$$z = x^2 + y^2 \quad (1076)$$

oříznutého rovinou

$$z = 1. \quad (1077)$$

Obr. 59



Řešení:

V kartézských souřadnicích můžeme dané těleso vyjádřit buď jako obrazec prvního typu:

$$\begin{aligned} -1 &\leq x \leq 1, \\ -\sqrt{1-x^2} &\leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ x^2 + y^2 &\leq z \leq 1, \end{aligned} \quad (1078)$$

nebo jako obrazec druhého typu:

$$\begin{aligned} -1 &\leq x \leq 1, \\ -\sqrt{z-x^2} &\leq y \leq \sqrt{z-x^2}, \\ x^2 &\leq z \leq 1. \end{aligned} \quad (1079)$$

V cylindrických souřadnicích je však toto těleso určeno mnohem jednoduššími nerovnostmi

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 &\leq \rho \leq 1, \\ \rho^2 &\leq z \leq 1. \end{aligned} \quad (1080)$$

Podle (1066) tedy máme

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V \rho \, d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\rho^2}^1 \rho \, dz d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 [\rho z]_{\rho^2}^1 d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\varphi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (1081)$$

Příklad 2:

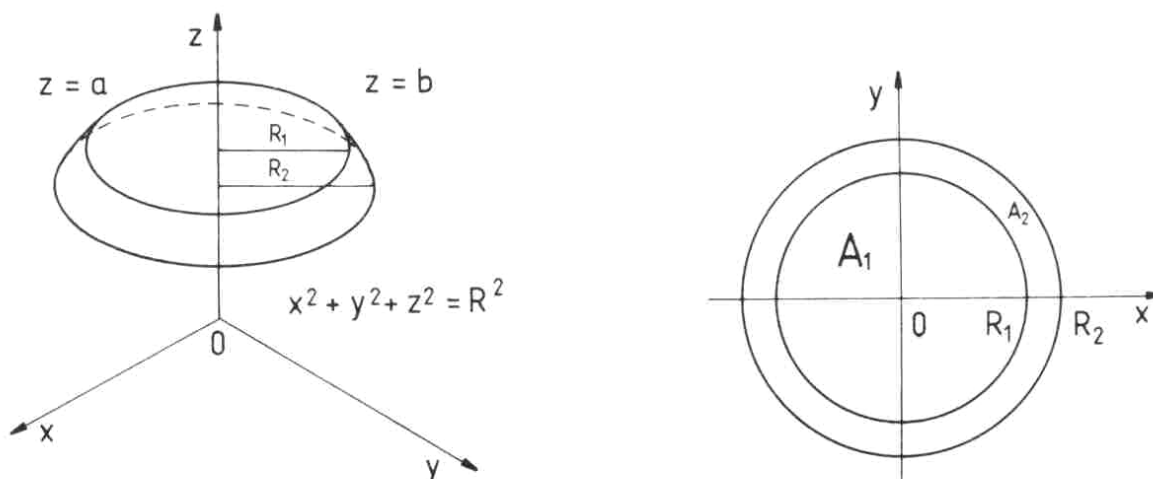
Vypočtěme objem množiny ohraničené plochami

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2, \\ z &= a, \\ z &= b, \end{aligned} \quad (1082)$$

kde

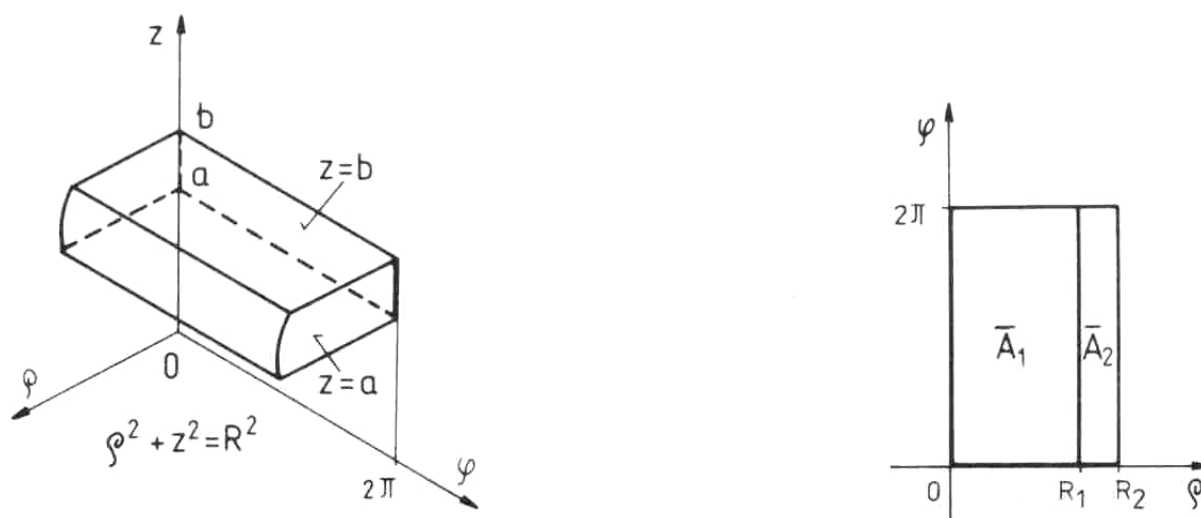
$$0 < a < b < R. \quad (1083)$$

Obr. 60

**Řešení:**

Množinu nelze zapsat jako jedno z těles mezi grafy spojitých funkcí, neboť horní plocha se skládá z části roviny $z = b$ a části polokoule. Úloha je osově symetrická vzhledem k ose z a proto využijeme transformace do cylindrických souřadnic (viz obr. 61).

Obr. 61



Hleaný obrazec je sjednocením válce poloměru R_1 a výšky $b - a$, o objemu

$$V_1 = \pi R_1^2 (b - a) = \pi (R^2 - b^2) (b - a), \quad (1084)$$

s tělesem objemu V_2 určeným nerovnostmi

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, \\ R_1 &\leq \rho \leq R_2, \\ a &\leq z \leq \sqrt{R^2 - \rho^2}. \end{aligned} \quad (1085)$$

R_1 je poloměr kružnice vzniklé řezem kulové plochy

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (1086)$$

rovinou $z = b$, tj.

$$x^2 + y^2 = R^2 - b^2. \quad (1087)$$

Odtud je

$$R_1 = \sqrt{R^2 - b^2}. \quad (1088)$$

Analogicky vypočteme poloměr

$$R_2 = \sqrt{R^2 - a^2}. \quad (1089)$$

Tedy

$$\begin{aligned} V_2 &= \iiint_V \rho \, d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \int_a^{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho \, dz d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \rho \left(\sqrt{R^2 - \rho^2} - a \right) d\rho d\varphi = 2\pi \left(\frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{b^2 - a^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (1090)$$

Hledaný objem proto je

$$V = V_1 + V_2 = \pi \frac{b-a}{3} (3R^2 - a^2 - ab - b^2). \quad (1091)$$

Poznámka:

Povšimněme si, že ke stejnému cíli vede díky osově symetrii předchozích dvou příkladů i jednodušší cesta a tou je přímé použití Riemannova integrálu namísto integrálu objemového. Tak např. poslední příklad směřuje přímo na integrál

$$\begin{aligned} J &= \pi \int_a^b \sqrt{(r^2 - x^2)^2} \, dx = \pi \int_a^b (r^2 - x^2) \, dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_a^b = \\ &= \pi \left(r^2 b - \frac{b^3}{3} - r^2 a + \frac{a^3}{3} \right) = \pi \frac{1}{3} (3r^2 (b-a) - (b^3 - a^3)) = \\ &= \pi \frac{1}{3} (3r^2 (b-a) - (b-a)(b^2 + ab + a^2)) = \pi \frac{b-a}{3} (3r^2 - b^2 - ab - a^2). \end{aligned} \quad (1092)$$

Pozorování:

Ze vztahů (1066), (790) plyne pro těžiště obecného tělesa jednoduchý vztah

$$T = \left(\frac{\iiint_V x \, dV}{\iiint_V dV}, \frac{\iiint_V y \, dV}{\iiint_V dV}, \frac{\iiint_V z \, dV}{\iiint_V dV} \right). \quad (1093)$$

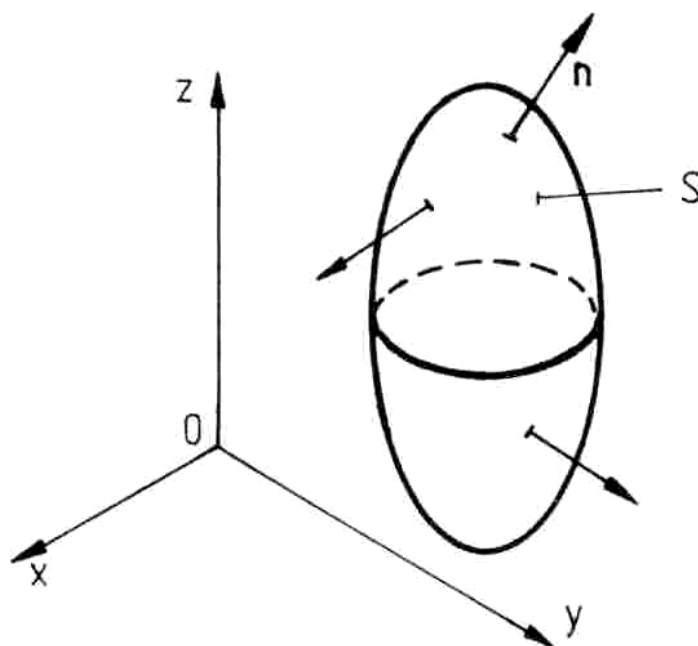
Gaussova – Ostrogradského věta, divergence vektorového pole

Michail Vasilěvič Ostrogradskij (1801 – 1862)

Mějme vektorové pole $\mathbf{F}(x, y, z)$ které protéká uzavřenou plochou S , tvořící hranici tělesa G objemu V . Tok pole \mathbf{F} touto plochou je pak dán plošným integrálem

$$\Phi = \oiint_S \mathbf{F} \, d\mathbf{S}. \quad (1094)$$

Obr. 62



Rozdělme nyní objem V na N menších objemů V_i . Určíme toky pole Φ_i plochami S_i ohraničujícími tyto dílčí objemy a budeme je sčítat. Opět lze snadno ukázat, že toky vnitřními styčnými ploškami se v tomto součtu navzájem vyruší, neboť při sčítání toků skrze hranici dvou sousedních objemů se objeví jednou s kladným a podruhé se záporným znaménkem (vytéká-li pole z jednoho objemu, zároveň vtéká do sousedního). Sumární tok bude proto roven právě původnímu toku plochou S :

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i = \sum_{i=1}^N \oiint_{S_i} \mathbf{F}_i d\mathbf{S} = \Phi. \quad (1095)$$

Zmenšujeme-li limitně objemy V_i , zůstává jejich součet konstantní. Se zmenšováním V_i se zmenšují i Φ_i , ale jejich součet Φ se rovněž nemění. Nabízí se tedy možnost vytvořit podíl těchto dvou neomezeně se zmenšujících veličin a prozkoumat vlastnosti jeho limity. Zvolíme v prostoru bod P o souřadnicích x, y, z a obklopíme jej malým objemem ΔV . Tok plochou ohraničující tento objem označíme $\Delta\Phi$. Vytvoříme posloupnost $\Delta V_i^{(P)}$ neustále se zmenšujících částí objemu

ΔV , které obsahují bod P . Této posloupnosti bude odpovídat posloupnost toků $\Delta\Phi_i^{(P)}$. Označíme

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{\Delta V_i^{(P)} \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi_i^{(P)}}{\Delta V_i^{(P)}}. \quad (1096)$$

Tato limita, pokud existuje, představuje tok pole \mathbf{F} v bodě P vztažený k jednotce objemu. Nazýváme jej **divergencí pole \mathbf{F}** v bodě P .

Upravíme-li nyní vztah (1094) na tvar

$$\Phi = \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \Delta\Phi_i = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta\Phi_i}{\Delta V_i} \Delta V_i. \quad (1097)$$

V limitě posloupností neustále se zmenšujících objemů obsahujících vždy jeden z bodů tělesa G se souřadnicemi x, y, z přejde podíl $\frac{\Delta\Phi_i}{\Delta V_i}$

v divergenci pole \mathbf{F} a sumu na pravé straně (1097) můžeme nahradit integrálem přes objem V :

$$\Phi = \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV. \quad (1098)$$

Tím jsme odvodili jednu z nejdůležitějších vět matematické analýzy, známou jako **Gaussova – Ostrogradského věta**. Tato věta jinými slovy říká, že **Tok vektorového pole \mathbf{F} uzavřenou plochou je roven celkové divergenci tohoto pole v objemu uzavřeném touto plochou**.

Pozorování:

Vztah (1098) umožňuje přejít od objemového integrálu k plošnému integrálu přes ohraničující plochu. Speciálně, volíme-li

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (1099)$$

můžeme pomocí Gauusovy – Ostrogradského věty stanovit objem V_G tělesa G výpočtem plošného integrálu přes hranici tělesa G :

$$V_G = \frac{1}{3} \oiint_S \mathbf{F} \, d\mathbf{S}. \quad (1100)$$

Zbývá nám již jen odvodit vztah pro výpočet $\operatorname{div} \mathbf{F}$. k tomuto účelu uvažujme elementární objem tvaru kvádrů o hranách Δx , Δy , Δz rovnoběžných s odpovídajícími osami kartézské soustavy. Tok dvojicí rovnoběžných podstav tohoto kvádrů bude

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{12} &= \Delta\Phi_2 + \Delta\Phi_1 = F_z(x, y, z + \Delta z) \Delta x \Delta y - F_z(x, y, z) \Delta x \Delta y = \\ &= \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z. \end{aligned} \quad (1101)$$

Celkový tok povrchem kvádrů tedy bude

$$\Delta\Phi = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \Delta V, \quad (1102)$$

kde $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Odtud již plyne, že

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (1103)$$

Příklad 1:

Vypočtete objem tělesa

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^3}{c^2} \leq 1 \right\} \quad (1104)$$

kde $a, b, c > 0$ jsou konstanty.

Řešení:

Jedná se o obecný elipsoid s poloosami a, b, c , pro jehož výpočet bude výhodné volit eliptické souřadnice (1065). Zřejmě je

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (1105)$$

Využijeme-li Gaussovu – Ostrogradského větu, okamžitě dostáváme

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dV = \frac{1}{3} \oiint_S x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \, d\mathbf{S} = \frac{1}{3} \iint_A xdydz + ydzdx + zdx dy = \\ &= \frac{abc}{3} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta + \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \\ &= \frac{abc}{3} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^3 \vartheta + \cos \vartheta \sin^2 \vartheta) \, d\vartheta \, d\varphi = \\ &= \frac{2}{3} abc \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3} abc [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned} \quad (1106)$$

Solenoidální vektorová pole

Vektorové pole, které je možno vyjádřit jako rotaci nějakého jiného vektorového pole:

$$\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}, \quad (1107)$$

se nazývá **solenoidálním** polem. Vytvořme uzavřenou plochu S ze dvou jiných ploch S_1 a S_2 o společné hranici l .

Podle Stokesovy věty tok pole (1104) uzavřenou plochou $S = S_1 + S_2$ bude

$$\begin{aligned}
\oiint_S \mathbf{F} \, d\mathbf{S} &= \oiint_S \operatorname{rot} \mathbf{G} \, d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{G} \, d\mathbf{S}_1 - \iint_{S_2} \operatorname{rot} \mathbf{G} \, d\mathbf{S}_2 = \\
&= \oint_l \mathbf{G} \, d\mathbf{l} - \oint_l \mathbf{G} \, d\mathbf{l} = 0.
\end{aligned} \tag{1108}$$

Aplikujeme nyní Gaussovu – Ostrogradského větu a dostaneme

$$\oiint_S \operatorname{rot} \mathbf{G} \, d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{G} \, dV = 0. \tag{1109}$$

Vzhledem k libovůli ve volbě plochy S a objemu V musí v celém prostoru platit

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{G} = 0. \tag{1110}$$

Toto je tedy nutná a postačující podmínka k tomu, aby pole \mathbf{F} bylo solenoidální. Odtud zároveň plyne fyzikální představa solenoidálního pole. Siločáry takového pole nesmějí mít nikde v prostoru kladné zdroje (zřídla) ani záporné zdroje (odtoky), což je přesný opak konzervativních polí. Na rozdíl od konzervativních polí se siločáry solenoidálních polí uzavírají samy do sebe, tj. vytvářejí tzv. víry. Příkladem solenoidálního pole je třeba magnetické pole, zatímco příkladem konzervativního pole je pole elektrické, či gravitační. Obecné vektorové pole samozřejmě nemusí být ani konzervativní ani solenoidální, tj.

$$\operatorname{div} \mathbf{F} \neq 0 \neq \operatorname{rot} \mathbf{F}. \tag{1111}$$

Lze však dokázat, že každé vektorové pole, které dostatečně rychle klesá v nekonečno, může být jednoznačným způsobem rozloženo na součet konzervativního a solenoidálního pole.

Poznámka:

Z interpretace plošného integrálu víme, že udává množství kapaliny, které proteče plochou S za jednotku času. Toto množství udává též trojný integrál na pravé straně (1098), který je limitou integrálních součtů, kde se sčítají hodnoty $\operatorname{div} \mathbf{a}$ v bodech množiny G uvnitř S .

V některých bodech je $\operatorname{div} \mathbf{a} > 0$ (zřídla), v jiných je $\operatorname{div} \mathbf{a} < 0$ (odtoky), nebo $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$. Jestliže

$$\iint_S \mathbf{a} \mathbf{n} \, dS > 0, \quad (1112)$$

pak ze zřidel vytéká větší objem kapaliny, než stihne odtékat odtoky. V případě, že

$$\iint_S \mathbf{a} \mathbf{n} \, dS < 0, \quad (1113)$$

je tomu přesně naopak. V prvním případě plochou kapalina odtéká, v druhém kapalina do plochy vtéká.

Hamiltonův a Laplaceův operátor, směrová derivace

Skalárním polem f rozumíme libovolnou funkci n proměnných. Jedná se o funkce, které přiřazují bodům přímky, roviny, prostoru či hyperprostoru skalár. Ve fyzice odpovídá skalárnímu poli např. teplotní pole, v geografii např. nadmořská výška, apod. Definujme **Hamiltonův operátor nabla**, předpisem

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (1114)$$



Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865)

Povšimněme si, že podle definice rotace vektorového pole (982) platí

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}. \quad (1115)$$

Podobně, pro divergenci vektorového pole máme

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \mathbf{F}. \quad (1116)$$

Působením operátoru nabla na libovolné skalární pole f vzniká nám již známý vektor – **gradient pole f** :

$$\nabla f \equiv \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (1117)$$

Skalárním součinem operátoru nabla se sebou samým vzniká tzv.

Laplaceův operátor delta

$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \text{div grad}, \quad (1118)$$

který může působit jak na skalární, tak i na vektorová pole.



Pierre-Simon, markýz de Laplace (1749 – 1827)

Podobnou vlastnost má též operátor

$$\mathbf{s}\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \equiv s_x \frac{\partial}{\partial x} + s_y \frac{\partial}{\partial y} + s_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1119)$$

Nazýváme jej **směrovou** či **Gateauxovou derivací** podle vektoru \mathbf{s} .



René Eugène Gateaux (1889 – 1914)

Rovněž i tento operátor může působit jak na skalární, tak na vektorová pole:

$$\mathbf{s} \nabla f = s_x \frac{\partial f}{\partial x} + s_y \frac{\partial f}{\partial y} + s_z \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\mathbf{s} \nabla \mathbf{F} = s_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + s_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + s_z \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} = \left(s_x \frac{\partial F_x}{\partial x} + s_y \frac{\partial F_x}{\partial y} + s_z \frac{\partial F_x}{\partial z}, \right. \quad (1120)$$

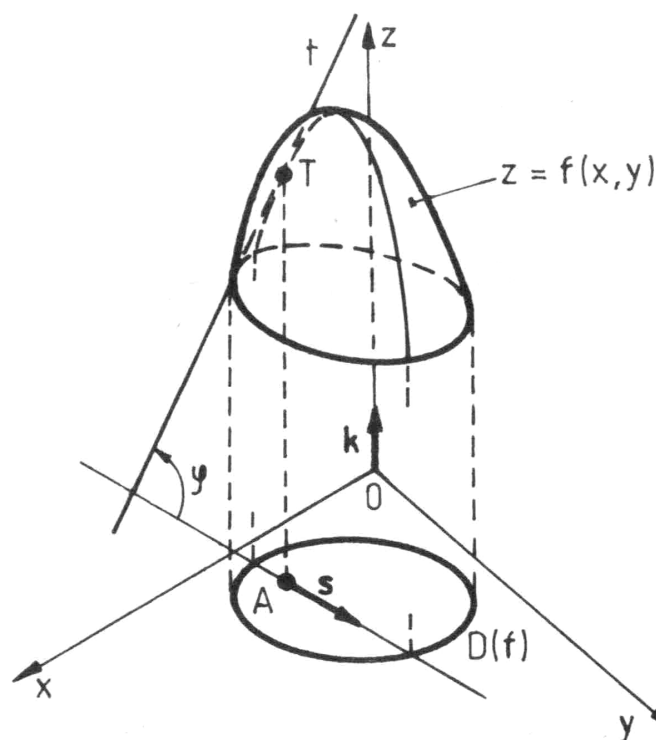
$$\left. s_x \frac{\partial F_y}{\partial x} + s_y \frac{\partial F_y}{\partial y} + s_z \frac{\partial F_y}{\partial z}, s_x \frac{\partial F_z}{\partial x} + s_y \frac{\partial F_z}{\partial y} + s_z \frac{\partial F_z}{\partial z} \right).$$

Bude-li \mathbf{s} jednotkový vektor, potom výraz $\mathbf{s} \cdot \nabla f$ je projekcí gradientu skalárního pole f do směru \mathbf{s} , a je tedy totožný s derivací pole v tomto směru. Podobně výraz $\mathbf{s} \nabla \mathbf{F}$ můžeme interpretovat jako derivaci vektorového pole ve směru \mathbf{s} .

V případě funkcí dvou proměnných lze charakterizovat směrovou derivaci přesněji geometricky, viz obr. 63: tečna průsečnice grafu funkce f s rovinou procházející bodem $A = [a_1, a_2, 0]$ a rovnoběžnou s vektory \mathbf{s} a \mathbf{k} svírá s vektorem \mathbf{s} úhel φ , pro který platí

$$\tan \varphi = \frac{\partial f(P)}{\partial s}. \quad (1121)$$

Obr. 63



Směrová derivace je tak zobecněním pojmu parciální derivace. Popisuje, jak rychle se mění v bodě P závisle proměnná s pohybem ve směru obecného vektoru \mathbf{s} .

Příklad 1:

Určeme směrovou derivaci funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 \quad (1122)$$

v bodě

$$P = [1, 1] \quad (1123)$$

ve směru

$$\mathbf{s} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (1124)$$

Řešení:

$$\mathbf{s} \nabla f = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (2x + y, 4y + x) = \sqrt{2}x + \frac{y}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}y + \frac{x}{\sqrt{2}}. \quad (1125)$$

Odtud

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{s} \nabla f(P) = 4\sqrt{2}. \quad (1126)$$

Příklad 2:

Určeme jednotkový vektor \mathbf{s} , v jehož směru je směrová derivace funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 \quad (1127)$$

v bodě

$$P = [1,1] \quad (1128)$$

největší a určíme její hodnotu.

Řešení:

Gradient funkce f v bodě P je

$$\nabla f(P) = (3,5). \quad (1129)$$

Největší směrová derivace funkce v bodě P nastává ve směru jednotkového vektoru \mathbf{s} , pro který platí

$$\mathbf{s} = a \operatorname{grad} f(P) = (3a, 5a), \quad a > 0. \quad (1130)$$

Odtud

$$|\mathbf{s}| = \sqrt{9a^2 + 25a^2} = a\sqrt{34} = 1, \quad (1131)$$

a tedy

$$a = \frac{1}{\sqrt{34}}. \quad (1132)$$

Proto

$$\mathbf{s} = \left(\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{5}{\sqrt{34}} \right). \quad (1133)$$

Výsledek:

$$\mathbf{s}\nabla f = \left(\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{5}{\sqrt{34}} \right) (2x + y, 4y + x) = \frac{6}{\sqrt{34}}x + \frac{3}{\sqrt{34}}y + \frac{20}{\sqrt{34}}y + \frac{5}{\sqrt{34}}x. \quad (1134)$$

Odtud

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{s}\nabla f(P) = \sqrt{34}. \quad (1135)$$

Tečná rovina

Definici tečny grafu funkce jedné proměnné, můžeme snadno zobecnit na funkce více proměnných v bodě $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$:

$$f_P(X) = f(P) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(p)}{\partial x_i} dx_i = f(P) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(p)}{\partial x_i} (x_i - p_i), \quad (1136)$$

kde suma

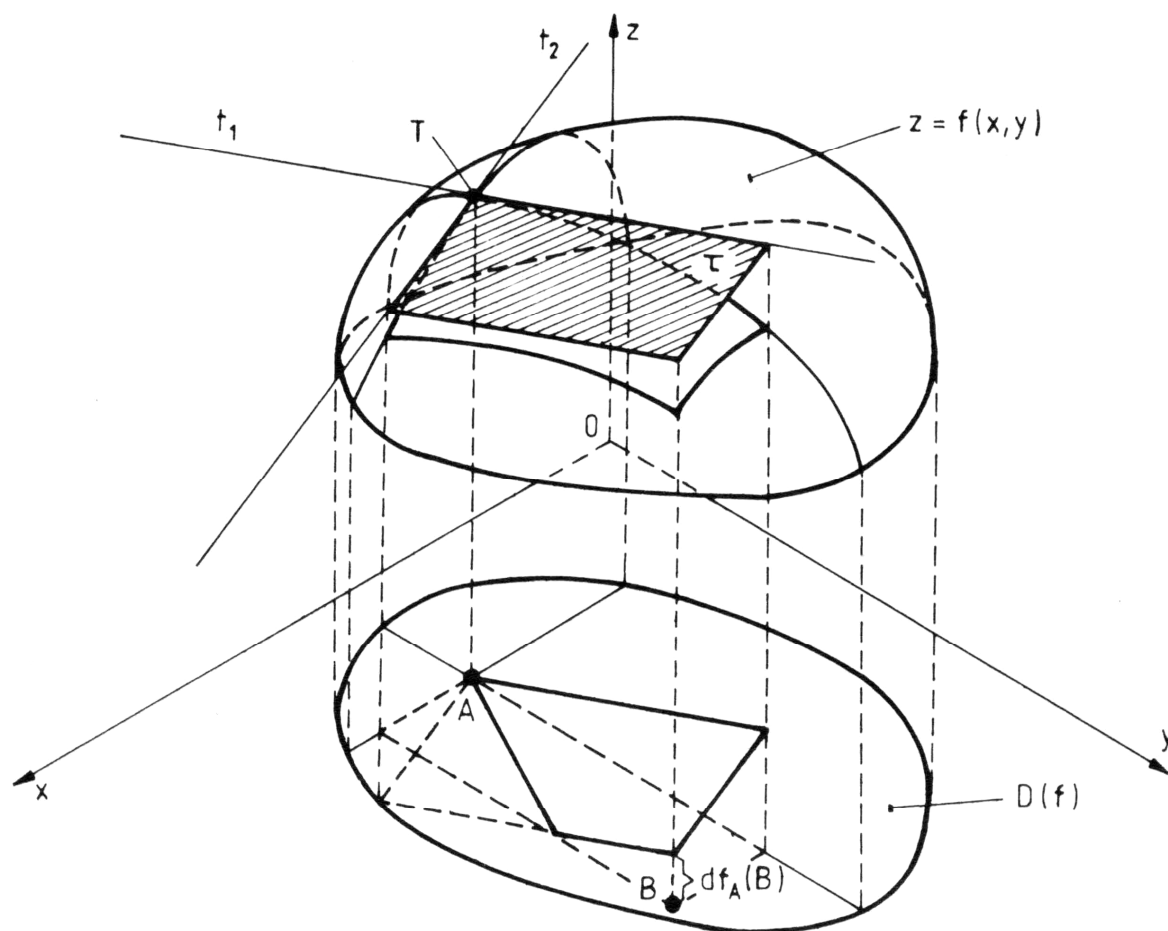
$$df_P(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(p)}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(p)}{\partial x_i} (x_i - p_i) \quad (1137)$$

představuje diferenciál funkce f více proměnných, v bodě P .

Speciálně pro funkce f dvou reálných proměnných odpovídá rovnice (1136) rovnici tečné roviny grafu funkce f v bodě $P = [p_1, p_2]$:

$$z = f(P) + \frac{\partial f(P)}{\partial x} (x - p_1) + \frac{\partial f(P)}{\partial y} (y - p_2). \quad (1138)$$

Obr. 64

**Příklad 1:**

Určeme tečnou rovinu k ploše

$$z = x^2 + xy + 2y^2 \quad (1139)$$

v bodě

$$P = [1, 1]. \quad (1140)$$

Řešení:

Uvedená plocha je grafem funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2. \quad (1141)$$

Funkce je diferencovatelná v bodě P a její diferenciál je

$$df_P(X) = 3(x-1) + 5(y-1). \quad (1142)$$

Protože

$$f(P) = 4, \quad (1143)$$

je hledaná rovnice tečné roviny v bodě P

$$z = 4 + 3(x-1) + 5(y-1). \quad (1144)$$

Uvedením na obecný tvar dostáváme

$$3x + 5y - z - 4 = 0. \quad (1145)$$

Taylorův rozvoj funkce více proměnných

Analogicky, jako u funkcí jedné proměnné, lze i funkce více proměnných rozvinout v řadu pomocí **zobecněné Taylorovy věty**:

Je-li m přirozené číslo a je-li funkce f v bodě P m -krát diferencovatelná, pak existuje jediný její Taylorův polynom $t_{m,P}(X)$ m -tého řádu v bodě P , přičemž platí:

$$t_{m,P}(X) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} d^k f_P(X). \quad (1146)$$

Je-li m přirozené číslo a je-li funkce f v bodě P diferencovatelná $(m+1)$ -krát a je-li $B \in U_\delta(P)$ pak existuje $\gamma \in (0,1)$ takové, že:

$$f(B) = t_{m,P}(B) + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f_{P+\gamma(B-P)}(B + \gamma(B-P)). \quad (1147)$$

Druhý člen na pravé straně vyjadřuje chybu náhrady funkční hodnoty $f(B)$ hodnotou Taylorova polynomu m -tého řádu v bodě P .

Příklad 1:

Určeme Taylorův polynom druhého řádu funkce

$$f(x, y) = x^y \quad (1148)$$

v bodě $P = (1, 1)$, a určíme chybu aproximace funkce f tímto polynomem na jednotkovém okolí bodu P .

Řešení:

Nejprve spočteme všechny první a druhé parciální derivace funkce f :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= yx^{y-1}, & \frac{\partial f}{\partial y} &= x^y \ln x, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} &= y(y-1)x^{y-2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} &= x^y \ln^2 x, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = x^{y-1}(1+y \ln x). \end{aligned} \quad (1149)$$

Dále

$$\begin{aligned} df_P(X) &= \frac{\partial f(P)}{\partial x}(x-p_1) + \frac{\partial f(P)}{\partial y}(y-p_2) = x-1, \\ d^2 f_P(X) &= \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial x}(x-p_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial y}(x-p_1)(y-p_2) + \frac{\partial^2 f(P)}{\partial y \partial y}(y-p_2)^2 = \\ &= 2(x-1)(y-1). \end{aligned} \quad (1150)$$

Proto

$$t_{2,P}(X) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) = 1 + (x-1)[1 + (y-1)]. \quad (1151)$$

Nyní spočteme

$$d^3 f_{A+\gamma(B-P)}(B + \gamma(B - P)). \quad (1152)$$

Platí **věta**:

Je-li funkce f n proměnných m -krát diferencovatelná v bodě P , pak všechny m -té parciální derivace v bodě P lišící se jen pořadím parciálního derivování jsou si rovné.

Je-li tedy funkce f dvou proměnných třikrát diferencovatelná v bodě P , pak platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y} &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x}, \end{aligned} \quad (1153)$$

Postačí nám tedy spočítat pouze následující třetí derivace

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial x} &= y(y-1)(y-2)x^{y-3}, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} &= [2y-1 + y(y-1)\ln x]x^{y-2}, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y} &= (2\ln x + y\ln^2 x)x^{y-1} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial y} &= x^y \ln^3 x. \end{aligned} \quad (1154)$$

Hledaný třetí diferenciál v bodě C tak bude mít tvar

$$\begin{aligned}
d^3 f_c(X) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial x} (x - c_1)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} (x - c_1)^2 (y - c_2) + \\
&+ 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y} (x - c_1) (y - c_2)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial y} (y - c_2)^3.
\end{aligned} \tag{1155}$$

Neboli

$$\begin{aligned}
d^3 f_c(X) &= c_2 (c_2 - 1) (y - 2) x^{c_2 - 3} (x - c_1)^3 + \\
&+ 3 [2c_2 - 1 + c_2 (c_2 - 1) \ln c_1] c_1^{c_2 - 2} (x - c_1)^2 (y - c_2) + \\
&+ 3 (2 \ln c_1 + c_2 \ln^2 c_1) c_1^{c_2 - 1} (x - c_1) (y - c_2)^2 + c_1^{c_2} \ln^3 c_1 (y - c_2)^3.
\end{aligned} \tag{1156}$$

Pak

$$\begin{aligned}
\forall B = [b_1, b_2] \in U_\delta(P) \exists \gamma \in (0, 1): \\
:b_1^{b_2} = t_{2,P}(B) + \frac{1}{6} d^3 f_{A+\gamma(B-A)}(B + \gamma(B - P)).
\end{aligned} \tag{1157}$$

Dosadíme-li nyní do (1156)

$$\begin{aligned}
C &= P + \gamma(B - P), \\
X &= B + \gamma(B - P),
\end{aligned} \tag{1158}$$

dostáváme konečný výsledek. Protože bod B jsme si stanovili uvnitř jednotkového okolí bodu P , můžeme volit např.

$$\begin{aligned}
B &= (1, 2), \\
\gamma &= 1,
\end{aligned} \tag{1159}$$

a máme

$$\begin{aligned}
C &= [1, 2], \\
X &= [1, 3].
\end{aligned} \tag{1160}$$

Odtud plyne

$$d^3 f_{A+\gamma(B-P)}(B + \gamma(B - P)) = 0. \quad (1161)$$

Na jednotkovém okolí bodu P tak Taylorův polynom

$$t_{2,P}(X) = 1 + (x - 1)[1 + (y - 1)] \quad (1162)$$

aproximuje funkci

$$f(x, y) = x^y \quad (1163)$$

s absolutní přesností.

Lokální extrémy funkce více proměnných

Lokální extrémy funkce více proměnných mohou být pouze v těch vnitřních bodech jejího definičního oboru, v nichž každá první parciální derivace, která existuje, nabývá hodnoty nula. Body, v nichž všechny první parciální derivace existují a jsou rovny nule, nazveme **stacionárními body funkce f** . Pro stacionární body funkce f tak platí podmínka

$$\nabla f(P) = \mathbf{0}. \quad (1164)$$

Analogicky, jako u funkcí jedné proměnné však funkce ještě nemusí mít ve stacionárním bodě lokální extrém, alébrž tzv. **sedlový bod** (vícerozměrnou analogii inflexního bodu). Nutná a postačující podmínka pro existenci lokálního extrému je u funkcí více proměnných komplikovanější, než u funkcí jedné proměnné a zní:

Věta:

Nechť funkce f dvou nebo více proměnných je dvakrát diferencovatelná ve svém stacionárním bodě P . Je-li

$$D_1(P) > 0, D_2(P) > 0, \dots, D_n(P) > 0, \quad (1165)$$

resp.

$$D_1(P) < 0, D_2(P) < 0, \dots, D_n(P) < 0, \quad (1166)$$

kde

$$D_n(P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_1 x_1} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_1 x_2} & \vdots & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_2 x_2} & \vdots & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_n x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_n x_n} \end{vmatrix}, \quad (1167)$$

pak má funkce v bodě P lokální minimum, resp. maximum. Je-li však

$$D_1(P) \neq 0, D_2(P) \neq 0, \dots, D_n(P) \neq 0 \quad (1168)$$

a zároveň neplatí (1165) ani (1166), potom funkce f nemá v bodě P lokální extrém ale má v něm sedlový bod.

Poznámka:

V bodech, v nichž funkce f splňuje kritérium (1165) ji nazýváme **pozitivně definitní**.

V bodech, v nichž funkce f splňuje kritérium (1166) ji nazýváme **negativně definitní**.

V bodech v nichž funkce f splňuje kritérium (1168) ji nazýváme **indefinitní**.

Vázané extrémny funkce více proměnných

Nechť f a g jsou funkce n proměnných. Řekneme, že funkce f má v bodě P **vázané maximum** s vazbou $g(X) = 0$, jestliže $g(A) = 0$ a

$$\forall X \in D(f): f(X) \leq f(A), g(X) = 0. \quad (1169)$$

Řekneme, že funkce f má v bodě P **vázané minimum** s vazbou $g(X) = 0$, jestliže $g(A) = 0$ a

$$\forall X \in D(f): f(X) \geq f(A), g(X) = 0. \quad (1170)$$

Vázaná maxima a minima nazýváme souhrnným názvem **vázané extrémny**.

Příklad 1:

Určeme vázané lokální extrémny funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (1171)$$

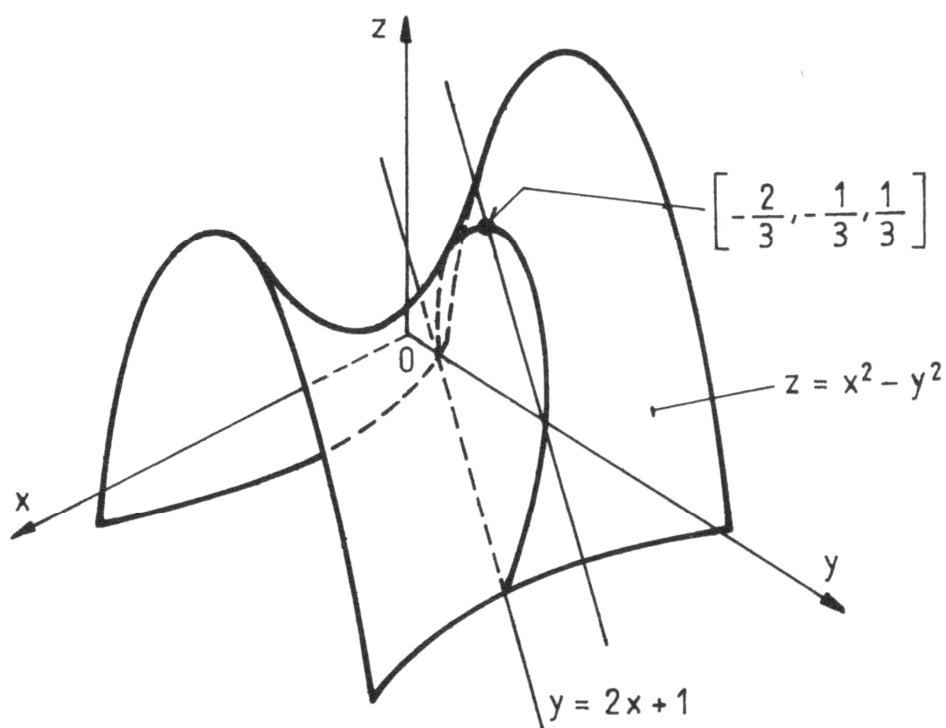
(sedlová plocha) s vazbami

a) $2x - y + 1 = 0,$

b) $x^2 + y^2 - 4 = 0, \quad (1172)$

c) $x^3 + y^3 - 3xy = 0.$

Obr. 65



Řešení:

a)

$$y = \varphi(x) = 2x + 1, \quad (1173)$$

takže

$$h(x) = f(x, \varphi(x)) = x^2 - (2x + 1)^2 = -3x^2 - 4x - 1. \quad (1174)$$

Úloha se tak redukuje na problém nalezení globálních extrémů funkce jedné proměnné.

$$\frac{dh}{dx} = -6x - 4 = 0, \quad (1175)$$

odkud

$$x = -\frac{2}{3} \quad (1176)$$

$$\frac{d^2h}{dx^2} = -6. \quad (1177)$$

Bod $x = -\frac{2}{3}$ je tedy globálním maximem funkce h , globální minimum tato funkce nemá. Odtud vyplývá, že funkce f má vázané maximum $1/3$ v bodě

$$[x, y] = \left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right], \quad (1178)$$

vázané minimum nemá.

Pozorování:

Geometricky úloha nalezení vázaných extrémů znamená nalezení extrémních hodnot podél zadané vazby.

b)

Vazbu v tomto případě tvoří kružnice se středem v počátku a poloměrem 2. Kružnice, jak víme, sama o sobě není funkcí, lze ji však vyjádřit jako sjednocení dvou funkcí:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \sqrt{4-x^2}, \\ \varphi_2(x) &= -\sqrt{4-x^2}. \end{aligned} \quad (1179)$$

Obě funkce jsou definovány na intervalu $\langle -2, 2 \rangle$. Dále

$$h(x) \equiv h_1(x) = h_2(x) = x^2 - \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 = 2x^2 - 4, \quad (1180)$$

$$\frac{dh}{dx} = 4x = 0.$$

Odkud

$$x = 0 \quad (1181)$$

je bod lokálního minima, neboť

$$\frac{d^2h}{dx^2} = 4. \quad (1182)$$

Navíc jsou zde dvě globální maxima v bodech -2 a 2 . Původní funkce f má tedy vázané minimum v bodech $[0, -2]$, $[0, 2]$ a vázané maximum v bodech $[-2, 0]$, $[2, 0]$.

c)

Zde se nám nepodaří převést implicitně formulovanou vazbu do explicitního tvaru. V tomto případě se užívá tzv. **Lagrangeova metoda**: nejprve utvoříme novou funkci

$$h = f + \lambda g, \quad (1183)$$

kde g je vazba a λ je číslo, které volíme tak, aby stacionární body funkce h byly současně kořeny g . Jednotlivé stacionární body funkce h pak testujeme na lokální extrémy a má-li v některém z nich funkce h lokální extrém, má v něm funkce f vázaný lokální extrém téhož typu s podmínkou $g(X) = 0$. Určení stacionárních bodů funkce h tak vede na soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} &= 0, \\
\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} &= 0, \\
&\vdots \\
\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} &= 0, \\
g &= 0.
\end{aligned}
\tag{1184}$$

Jedná se o soustavu o $n + 1$ neznámých (n neznámých tvoří souřadnice x_1, x_2, \dots, x_n příslušného stacionárního bodu a další neznámou je číslo λ).

V našem případě tedy dostáváme

$$h(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^3 + y^3 - 3xy). \tag{1185}$$

Pro její stacionární body z (1184) plyne

$$\begin{aligned}
2x + \lambda(3x^2 - 3y) &= 0, \\
2y + \lambda(3y^2 - 3x) &= 0, \\
x^3 + y^3 - 3xz &= 0.
\end{aligned}
\tag{1186}$$

Řešením této soustavy jsou dva stacionární body funkce h :

$$\begin{aligned}
[0, 0], \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\
\left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right], \quad \lambda = -\frac{4}{3}.
\end{aligned}
\tag{1187}$$

Snadno zjistíme, že v počátku má funkce h např. pro $\lambda = 0$ lokální minimum, takže funkce f má v počátku vázané lokální minimum.

V bodě $\left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$, $\lambda = -\frac{4}{3}$ má funkce h lokální maximum, takže funkce f zde má vázané lokální maximum.

Úvod do řešení parciálních diferenciálních rovnic

Schrödingerova rovnice

Představa částic, coby drobných kuliček analogických běžným objektům známým z makrosvěta, začíná selhávat již zhruba při Planckových hmotnostech (10^{-8} kg). Při ještě menších hmotnostech částic se začíná stále výrazněji projevovat jejich vlnová podstata. Již v roce 1905 ukázal Albert Einstein, že fotoelektrický jev je vysvětlitelný pouze za předpokladu, že elektromagnetické záření má mimo obvyklých vlnových, zároveň i korpuskulární vlastnosti. Postuloval tak částici světla, která byla později nazvána **foton**. Energie fotonu o frekvenci ν je dána jednoduchým Einsteinovým vztahem

$$E = \nu \cdot h, \quad (1188)$$

za jehož odvození Einstein obdržel Nobelovu cenu v roce 1921.



Albert Einstein (1879 – 1955)

Vidíme tedy, že energie fotonu je přímo úměrná jeho frekvenci, kde konstantou úměrnosti je přitom **Planckova konstanta** $h \approx 6 \cdot 10^{-34}$ J·s, která vyplynula z ještě dřívějších úvah Maxe Plancka (psal se rok 1900) o vlastnostech vyzařování absolutně černého tělesa.



Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 – 1947)

V kvantové mechanice je obvyklé pracovat nikoli s frekvencemi, ale s úhlovými frekvencemi

$$\omega = 2\pi\nu . \quad (1189)$$

V této symbolice má pak Einsteinova formule (1188) obvyklejší tvar

$$E = \omega \cdot \hbar , \quad (1190)$$

kde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ je tzv. **redukovaná Planckova konstanta** která je považována za skutečně elementární kvantum **akce** (veličiny dané součinem energie a času).

Protože mezi frekvencí a vlnovou délkou platí jednoduchý převodní vztah

$$\nu = \frac{c}{\lambda} , \quad (1191)$$

kde c je rychlost postupu vlnění, dostáváme pro energii fotonu alternativní vyjádření

$$E = \frac{c \cdot h}{\lambda} = m \cdot c^2 . \quad (1192)$$

Počátkem 20. let minulého století navrhl francouzský fyzik Louis de Broglie, že by formule (1192) měla platit zcela obecně nejen pro fotony, ale i pro všechny ostatní částice.

Z rovnosti (1192) okamžitě plyne de Broglieův vztah mezi hybností částice p a její vlnovou délkou λ :

$$\lambda = \frac{h}{mu} = \frac{h}{p}, \quad (1193)$$

kde u nyní značí obecně rychlost částice.



Louis Victor Pierre Raymond vévoda de Broglie (1892 – 1987)

De Broglieova hypotéza byla skutečně experimentálně potvrzena v experimentech s elektrony a dalšími částicemi, které po průchodu dvěma úzkými štěrbinami vzájemně interferovaly, jako by se vskutku jednalo o vlnění o vlnové délce λ .

Jestliže jsou částice zároveň vlněním, pak musí být popsány obecnou vlnovou funkcí:

$$\psi = A \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \right]. \quad (1194)$$

Dosadíme-li do tohoto obecného výrazu $2\pi\nu$ za ω a $\lambda\nu$ za u , dostaneme vlnovou funkci zcela konkrétní částice:

$$\psi = A \exp \left[-2\pi i \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) \right], \quad (1195)$$

neboli z de Broglieova vztahu

$$\psi = A \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (Et - px) \right]. \quad (1196)$$

Výraz (1196) je matematickým vyjádřením vlnového ekvivalentu volné částice s celkovou energií E a hybností p , pohybující se ve směru $+x$.

Jestliže částice podléhá nejrůznějším omezením, jakým je např. dutina rezonátoru, potřebujeme znát základní diferenciální rovnici, pro funkci ψ v takovémto omezujícím prostředí.

Derivujeme li (1196) dvakrát podle x a jedenkrát podle t , dostaneme

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi \quad (1197)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \psi,$$

Odtud

$$p^2 \psi = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (1198)$$

$$E \psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (1199)$$

Při nerelativistických rychlostech (malých ve srovnání s rychlostí světla) je celková energie E částice prostým součtem její energie kinetické a potenciální energie V , která je obecně funkcí polohy x a času t :

$$E = \frac{p^2}{2m} + V. \quad (1200)$$

Vynásobením této rovnice vlnovou funkcí ψ částice máme

$$E\psi = \frac{p^2\psi}{2m} + V\psi . \quad (1201)$$

Dosazením výrazů (1198) a (1199) do (1201) obdržíme hledanou diferenciální rovnici :

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - V\psi . \quad (1202)$$

Tuto základní pohybovou rovnici kvantové mechaniky odvodil Erwin Schrödinger v roce 1925, který je tak právem považován za rok zrodu kvantové mechaniky.



Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887 – 1961)

Protože reálný prostoročas je čtyřrozměrný, přičemž jeden rozměr připadá na čas a zbylé 3 na prostor, je potřeba zobecnit Schrödingerovu rovnici na trojrozměrný tvar:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - V\psi , \quad (1203)$$

Příklad 1:

Jednorozměrnou vlnovou funkci Ψ částice můžeme upravit do tvaru

$$\Psi = A \cdot \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(Et - px)\right] = A \cdot \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \equiv \psi \cdot \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \quad (1204)$$

v němž je Ψ součinem časově závislé funkce $\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$ a funkce polohy ψ .



Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821 – 1894)

Ve skutečnosti mají všechny vlny v konzervativních silových polích časovou závislost tohoto tvaru.

Dosadíme-li nyní Ψ do Schrödingerovy rovnice, obdržíme po drobné úpravě rovnici

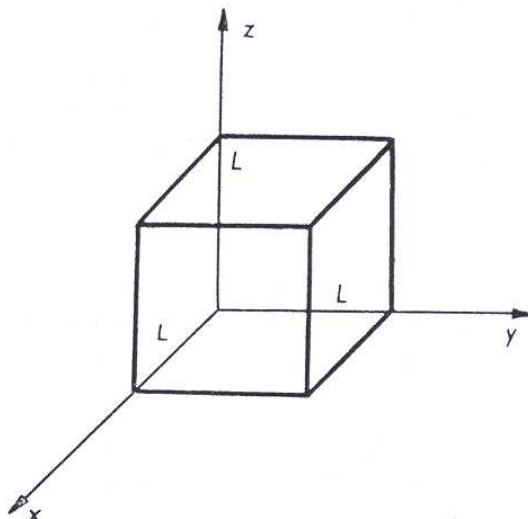
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0, \quad (1205)$$

což je tzv. **stacionární vlnová rovnice**. Její trojrozměrný tvar je

$$\nabla^2 \psi + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0. \quad (1206)$$

Řešme nyní tuto rovnici pro nitro krychlové dutiny, kde je na ψ kladena hraniční podmínka $\psi = 0$ všude na stěnách dutiny.

Obr. 66



Rovnice (1206) obsahuje všechny tři souřadnice x, y, z .

Abychom našli řešení, musíme ji nejprve separovat na tři nezávislé rovnice, z nichž každá obsahuje jen jednu souřadnici.

Předpokládejme proto, že vlnová funkce $\psi(x, y, z)$ je ve skutečnosti součinem tří funkcí $\psi_x(x)$, $\psi_y(y)$, $\psi_z(z)$, jež závisí vždy jen na jedné proměnné x, y , resp. z , tj.

$$\psi(x, y, z) = \psi_x(x) \cdot \psi_y(y) \cdot \psi_z(z) . \quad (1207)$$

Tento předpoklad je rozumný, neboť obsahuje jen nezávislost změny ψ s každou souřadnicí na změnách ψ s ostatními souřadnicemi.

Parciální derivace funkce (1207) jsou

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \psi_y \psi_z \frac{d^2 \psi_x}{dx^2} , \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \psi_x \psi_z \frac{d^2 \psi_y}{dy^2} , \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \psi_x \psi_y \frac{d^2 \psi_z}{dz^2} . \end{aligned} \quad (1208)$$

Dosadíme-li nyní tyto parciální derivace spolu s $\psi = \psi_x \psi_y \psi_z$ do (1206), dostaneme

$$\psi_y \psi_z \frac{d^2 \psi_x}{dx^2} + \psi_x \psi_z \frac{d^2 \psi_y}{dy^2} + \psi_x \psi_y \frac{d^2 \psi_z}{dz^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_x \psi_y \psi_z = 0. \quad (1209)$$

Dělením této rovnice vlnovou funkcí (1207) a uspořádáním členů máme

$$\frac{1}{\psi_x} \frac{d^2 \psi_x}{dx^2} + \frac{1}{\psi_y} \frac{d^2 \psi_y}{dy^2} + \frac{1}{\psi_z} \frac{d^2 \psi_z}{dz^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (1210)$$

Každý člen na levé straně rovnice (1210) je funkcí jiné proměnné a pravá strana je konstanta nezávislá na hodnotách x, y, z .

Každý člen nalevo se tudíž musí rovnat samostatné konstantě, což lze vyjádřit vztahy

$$\frac{1}{\psi_x} \frac{d^2 \psi_x}{dx^2} = -k_x^2, \quad (1211)$$

$$\frac{1}{\psi_y} \frac{d^2 \psi_y}{dy^2} = -k_y^2, \quad (1212)$$

$$\frac{1}{\psi_z} \frac{d^2 \psi_z}{dz^2} = -k_z^2, \quad (1213)$$

kde konstanty k jsou ve skutečnosti složkami vlnového vektoru \mathbf{k} stojaté vlny uvnitř krychlové dutiny, které musí splňovat podmínku

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (1214)$$

Rovnice (1211), (1212), (1213) mohou mít jen sinová a kosinová řešení.

Okrajové podmínky kladené na ψ požadují, aby bylo $\psi = 0$ na stěnách dutiny, tj. v místech, kde je x, y, z rovno 0 nebo L .

Těmto okrajovým podmínkám vyhovuje jen funkce sinus, neboť jen ona se rovná v počátku 0.

Nyní již tedy můžeme zapsat hledanou vlnovou funkci ψ ve tvaru

$$\psi(x, y, z) = \psi_x \psi_y \psi_z = A \cdot \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \cdot \sin(k_z z) . \quad (1215)$$

Volbou funkce sinus jsme zatím zajistili, aby bylo $\psi = 0$ v počátku.

Nyní musíme určit velikosti k_x, k_y, k_z komponent vlnového vektoru tak, aby $\psi = 0$ i při $x, y, z = L$.

Tyto, tzv. **vlastní hodnoty** vlnové funkce ψ , získáme z druhé okrajové podmínky, coby

$$\begin{aligned} k_x \cdot L &= \pi \cdot n_x ; & n_x &\in \mathbf{N} , \\ k_y \cdot L &= \pi \cdot n_y ; & n_y &\in \mathbf{N} , \\ k_z \cdot L &= \pi \cdot n_z ; & n_z &\in \mathbf{N} . \end{aligned} \quad (1216)$$

Toto můžeme napsat též ekvivalentním způsobem z pomoci vlnového čísla k pro nějž platí

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \pi^2 \left(\frac{n_x^2}{L^2} + \frac{n_y^2}{L^2} + \frac{n_z^2}{L^2} \right) ; \quad n_x, n_y, n_z \in \mathbf{N} . \quad (1217)$$

Vlnové funkce uvnitř dutiny jsou pak dány výrazem

$$\psi = A \cdot \sin \frac{n_x \pi \cdot x}{L} \cdot \sin \frac{n_y \pi \cdot y}{L} \cdot \sin \frac{n_z \pi \cdot z}{L} ; \quad n_x, n_y, n_z \in \mathbf{N} . \quad (1218)$$

a možné energie jsou

$$E = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad (1219)$$

Hodnoty vlnového čísla k tvoří jednoduchou posloupnost jak jsme zvyklí v jednorozměrném případě.

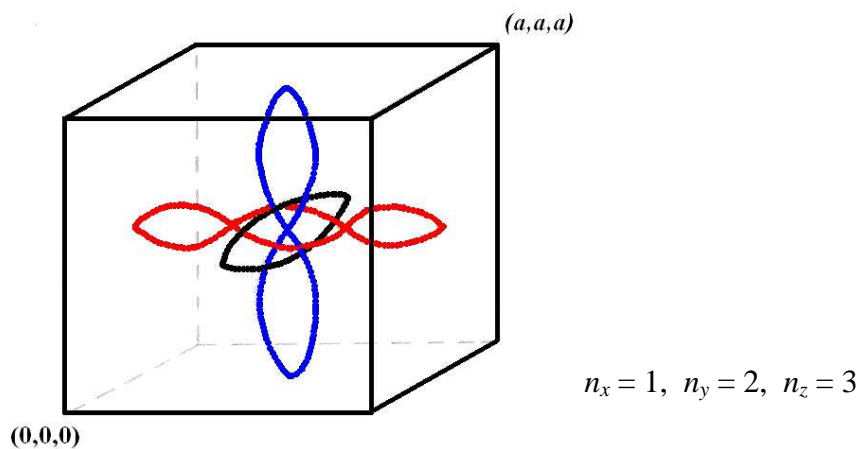
Může se stát, že i více než jedna stojatá vlna má tutéž hodnotu k , a tudíž stejnou frekvenci a stejnou energii. Tuto skutečnost použil dánský fyzik Niels Bohr pro popis energetických hladin elektronů v atomu vodíku.



Niels Henrik David Bohr (1885 – 1962)

Mají-li dvě nebo více stojatých vln společnou frekvenci, nazýváme je **degenerovanými stojatými vlnami**.

Obr. 67



V dutině je stupeň degenerace tím větší, čím větší má dutina stupeň symetrie.

V našem případě krychlové dutiny je vůbec největší.

K tomu, aby v krychlové dutině o straně L existoval mód (1215), musí délka každé komponenty jeho vlnového vektoru být rovna celočíselnému násobku hodnoty π/L .

Módy můžeme znázornit zobrazením bodů (k_x, k_y, k_z) v třírozměrném prostoru.

V případě obecně obdélníkové dutiny o stranách délky L_x, L_y, L_z , můžeme (1217) okamžitě zobecnit

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \pi^2 \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right); \quad n_x, n_y, n_z \in \mathbf{N} \quad (1220)$$

odkud pro možné energie plyne

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right). \quad (1221)$$

Úvod do Fourierovy analýzy

a) Fourierova řada



Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830)

Nejjednodušší odvození Fourierovy transformace vychází z tzv. Fourierovy řady periodické funkce, jejíž motivaci lze nalézt ve skládání anizochronních harmonických kmitů téhož směru s takovými frekvencemi, aby výsledná funkce mohla být periodická, tedy $T = nT_n$, kde n je celé číslo. Funkce daná touto superpozicí bude mít tvar

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t), \quad (1222)$$

kde a_n, b_n jsou funkce tvořící tzv. spektrum operátoru f .

Nejprve budeme uvažovat funkci periodickou na intervalu $\langle 0, T \rangle$ a budeme předpokládat platnost výše uvedeného rozvoje pro nějakou kombinaci koeficientů a_n, b_n . Obě strany rovnosti vynásobíme funkcí $\sin(m\Omega t)$ a prointegrujeme přes interval délky

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}. \quad (1223)$$

Dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) \sin(m\Omega t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^T a_0 \sin(m\Omega t) dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^T \sin(m\Omega t) \sin(n\Omega t) dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \sin(m\Omega t) \cos(n\Omega t) dt. \end{aligned} \quad (1224)$$

Využitím vzájemné ortogonality funkcí 1, sin, cos dostaneme

$$\int_0^T f(t) \cos(m\Omega t) dt = \frac{a_m T}{2} \quad (1225)$$

Podobně postupujeme při určení koeficientu a_n a tím získáme vztahy

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(m\Omega t) dt, \quad (1226)$$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(m\Omega t) dt.$$

Aby bylo možno funkci $f(t)$ vyjádřit řadou, musí splňovat tzv. Dirichletovy podmínky:

1. $f(t)$ je na intervalu $\langle 0, T \rangle$ ohraničená,
2. $f(t)$ má na intervalu $\langle 0, T \rangle$ nejvýše konečný počet singularit,
3. $f(t)$ má na intervalu $\langle 0, T \rangle$ alespoň jednu z těchto vlastností:
 - (a) má konečný počet bodů ostrého lokálního extrému,
 - (b) je po částech monotónní,
 - (c) je po částech hladká.



Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859)

Jestliže funkce $f(t)$ tyto podmínky splňuje, pak v každém bodě spojitosti ji lze rozvinout v řadu (1222) tak, že je $f(t)$ součtem této řady a v každém bodě t_0 nespojitosti prvního druhu je součet této řady roven 1. Dirichletovy podmínky jsou však pouze postačující, nikoliv nutné. Existují funkce, které tyto podmínky nesplňují a přesto jim přiřazená Fourierova řada konverguje tak, že jejím součtem je rozvíjená funkce.

Pro praktické počítání obvykle vyjadřujeme Fourierovu řadu na intervalu $p \in \langle a, b \rangle$ ve tvaru

$$F_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m \left(a_k \cos \frac{2\pi kx}{b-a} + b_k \sin \frac{2\pi kx}{b-a} \right), \quad (1227)$$

kde

$$a_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi kx}{b-a} dx, \quad (1228)$$

$$b_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi kx}{b-a} dx.$$

Pro derivaci a integrál Fourierovy řady dále platí:

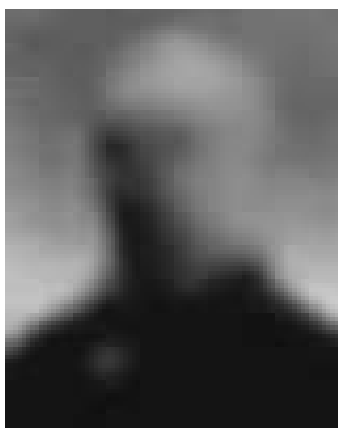
$$F'_m(x) = \sum_{k=1}^m -k \left(a_k \sin \frac{2\pi kx}{b-a} - b_k \cos \frac{2\pi kx}{b-a} \right),$$

$$\int F_m(x) dx = \int_a^x F_m(t) dt = \frac{a_0}{2}(x+b) +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \left[a_k \sin \frac{2\pi kx}{b-a} - b_k \left(\cos \frac{2\pi kx}{b-a} - \cos \frac{2\pi kb}{b-a} \right) \right]. \quad (1229)$$

Specielně je možno z Fourierovy řady odvodit tzv. **Parsevalovu rovnost**:

$$\frac{2}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2). \quad (1230)$$



Marc-Antoine Parseval (1755 – 1836)

Příklad 1:

Sestrojte Fourierovu řadu padesátého stupně následujících signálů jednotkové amplitudy:

- Jednotkové obdélníkové pulsy,
- Rovnoramenné pilovité pulsy,
- Cykloida jednotkového poloměru.

Řešení:

$$F_{50}(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx + \sum_{k=1}^{50} \left[\sin(\pi kx) \int_{-1}^1 f(x) \sin(\pi kx) dx + \cos(\pi kx) \int_{-1}^1 f(x) \cos(\pi kx) dx \right], \quad (1231)$$

kde

a) $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, (1232)

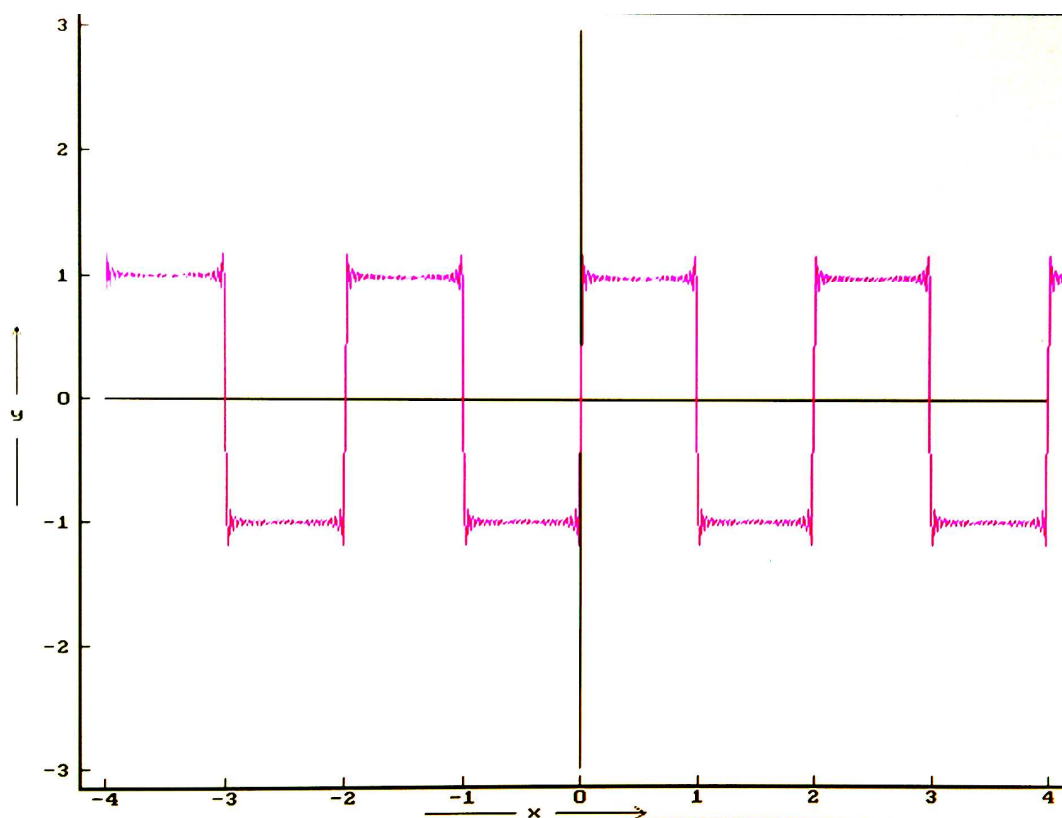
b) $f(x) = x$, (1233)

c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. (1234)

Grafy této Fourierovy řady pro uvedené funkce f jsou vykresleny na následujících obrázcích.

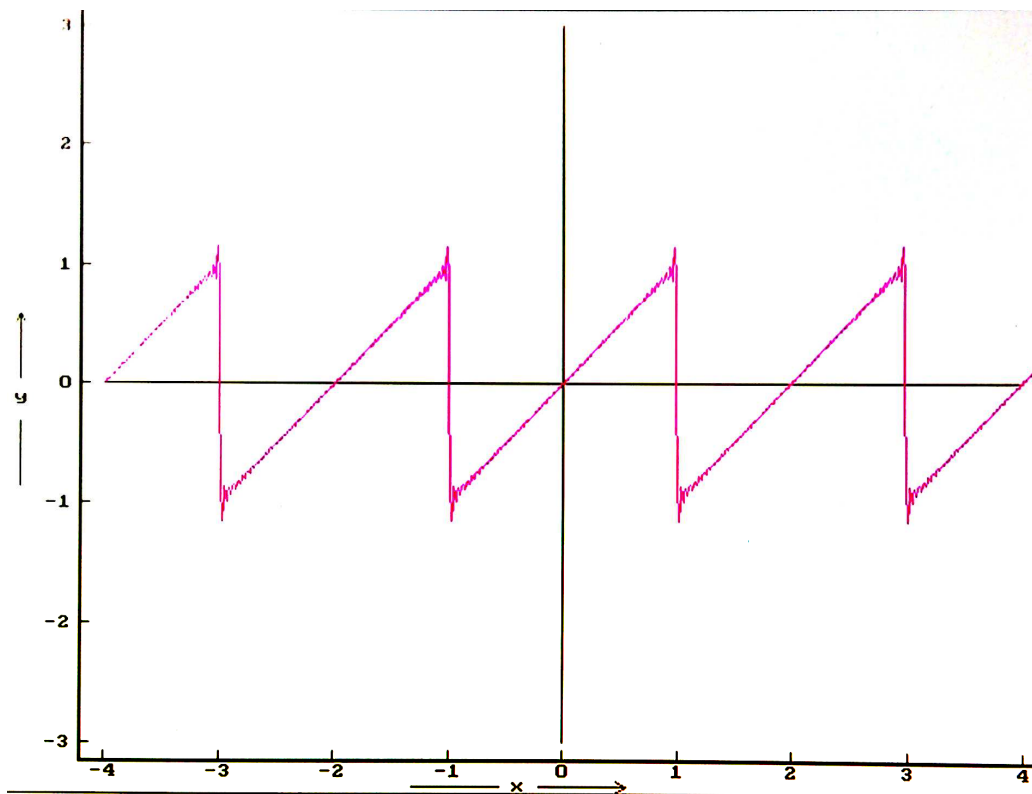
Obr. 68

a)



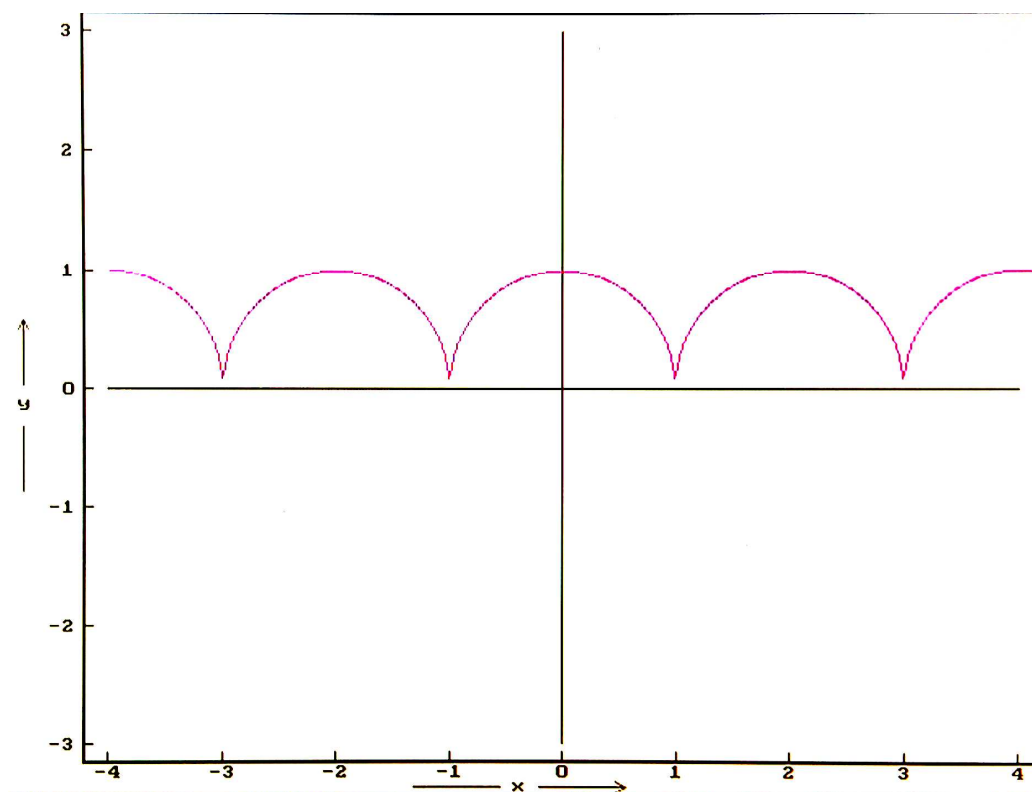
Obr. 69

b)



Obr. 70

c)



b) Fourierova transformace

Výraz pro Fourierovu transformaci můžeme odvodit z Fourierovy řady provedením limitního procesu $T \rightarrow \infty$, tedy zvolením nekonečné doby periody, čímž umožníme využití této metody i pro funkce, které nejsou periodické.

Dosadíme-li do řady (1222) vzorce pro koeficienty (1226), využitím základních trigonometrických vztahů pro $\cos(\tau - t)$ dostaneme

$$f(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\Omega(\tau - t)) dt, \quad (1235)$$

Budeme-li uvažovat pouze funkce absolutně integrovatelné na celé reálné ose

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty, \quad (1236)$$

pak první člen bude mít v limitě pro $T \rightarrow \infty$ nulovou hodnotu.

Ve druhém členu máme aritmetickou posloupnost $n\Omega$ s konstantní diferencí Ω . Označíme-li

$$\begin{aligned} n\Omega &= \omega, \\ \Delta\omega &= \Omega = \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \quad (1237)$$

dostaneme

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\omega(\tau - t)) dt \right] \Delta\omega, \quad (1238)$$

Výraz sumace vyjadřuje v limitě $T \rightarrow \infty$ integrální součet a rovnice (1238) přejde ve dvojný integrál

$$f(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega(\tau-t)) dt d\omega. \quad (1239)$$

Dosadíme-li do (1239) podle Eulerova vzorce za funkci \cos , dostaneme konečný výraz pro Fourierův integrál

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega(\tau-t)} dt d\omega. \quad (1240)$$

Tento vztah se dá zapsat v symetrickém tvaru jako

$$f(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega\tau} d\omega \quad (1241)$$

Výraz uvnitř hranaté závorky považujeme za Fourierovu transformaci funkce $f(t)$ a zbylá část vztahu udává inverzní Fourierovu transformaci

$$\mathcal{F}(f(t)) \equiv F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (1242)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) \equiv f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega. \quad (1243)$$

Při odvozování (limitním přechodu) Fourierova integrálu byly použity předpoklady o integrovatelnosti funkce $f(t)$ a o její rozvinutelnosti ve Fourierovu řadu na každém intervalu $\langle a, b \rangle$ (tedy splnění

Dirichletových podmínek), přičemž se předpokládalo, že integrál vyjadřuje funkci $f(t)$ ve všech bodech spojitosti. Fourierova transformace však může existovat i k funkcím, které tyto podmínky nesplňují.

Základní vlastnosti

Pro praktické využití Fourierovy transformace jsou důležité její následující vlastnosti:

Linearita: Z vlastností integrálu plyne vztah

$$\mathcal{F}(af(t) + bg(t)) = a\mathcal{F}(f(t)) + b\mathcal{F}(g(t)) \quad (1244)$$

pro libovolné a, b (i komplexní), z čehož plyne linearita Fourierovy transformace.

Změna měřítka: Je-li v argumentu funkce $f(t)$ provedena změna měřítka, pak platí

$$\mathcal{F}(f(at)) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (1245)$$

Posun v čase: Provedeme-li v argumentu posunutí τ , pak pro obraz platí

$$\mathcal{F}(f(t - \tau)) = \mathcal{F}(f(t) \times e^{-i\omega\tau}). \quad (1246)$$

Modulační věta: Je-li posunutí τ provedeno ve spektrální oblasti, pak platí

$$\mathcal{F}(f(t)e^{i\tau t}) = F(\omega - \tau), \quad (1247)$$

tedy posunutí se projeví modulací.

Dualita transformace: Pro dvojnásobné užití Fourierovy transformace platí

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f(t))) = f(-\omega), \quad (1248)$$

kde je nutno po provedení první transformace formálně zaměnit ω za t .

Derivace originálu: Má-li funkce $f(t)$ na každém intervalu konečné délky derivaci ve smyslu absolutně spojitě funkce $f'(t)$ a obě tyto funkce jsou lebesgueovskými integrovatelnými (popř. obě jsou v kvadrátu) na intervalu $(-\infty, \infty)$, pak platí

$$\mathcal{F}(f'(t)) = i\omega\mathcal{F}(f(t)) \quad (1249)$$

tedy operace derivování v originálu přechází na násobení v obraze. Opětovným použitím lze odvodit vztah i pro vyšší derivace (n -tého řádu), v němž je výraz $i\omega$ nahrazen $(i\omega)^n$

Derivování obrazu: Necht' jsou funkce $f(t)$ a $tf(t)$ lebesgueovskými integrovatelnými (popř. obě v kvadrátu), pak platí

$$\mathcal{F}'(f(t)) = -i\mathcal{F}(tf(t)) \quad (1250)$$

tedy derivování obrazu přechází v násobení originálu t . Obdobně pro vyšší řády derivace se vyskytnou vztahy $i^n, t^n f(t)$.

Integrace originálu: Existují-li Fourierovy transformace funkcí $f(t)$, $\int f(t) dt$, pak

$$\mathcal{F} \left(\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right) = \frac{1}{i\omega} \mathcal{F}(f(t)), \quad (1251)$$

tedy integrace v obraze přejde v dělení výrazem $i\omega$, pro n -násobnou integraci se vyskytuje násobení $(i\omega)^n$.

Obraz reálné funkce: Je-li funkce $f(t)$ reálná a jestliže k ní existuje její Fourierův obraz $F(\omega)$, pak platí pro komplexní sdružení

$$\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{F}^*(-\omega) \quad (1252)$$

Parsevalova věta: Je-li $f(t)$ absolutně integrovatelná a omezená pro skoro všechna t , pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (1253)$$

Limitní vlastnosti: Je-li

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (1254)$$

pak pro Fourierův obraz $F(\omega)$ platí

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} F(\omega) = 0 \quad (1255)$$

Příklady aplikací Fourierovy transformace

a) Princip neurčitosti

Uvažujme funkci $f(t)$ se spojitou derivací (pro jednoduchost) a nulovou pro dostatečně vysoké absolutní hodnoty t . Disperze této funkce R vzhledem k bodu a je dána vztahem

$$D_f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-a)^2 |f(t)|^2 dt \quad (1256)$$

Hodnotu a , pro kterou je $D_f(a)$ minimální, nazýváme **střední argument funkce f** . Nechť dále je b střední argument Fourierovy transformace funkce $f(t)$ a předpokládejme $a = b = 0$.

Uvažujme funkci parametru

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |tf(t) + \tau f'(t)|^2 dt, \quad (1257)$$

kteřou rozepsáním, integrací per partes a použitím Parsevalovy rovnosti pro $f'(t)$ upravíme do tvaru

$$I(\tau) = D_f(0) - \tau \|f\|^2 + \tau^2 D_F(0) \geq 0. \quad (1258)$$

Diskriminant tohoto výrazu musí být nekladný:

$$\|f\|^4 - 4D_f(0)D_F(0) \leq 0 \quad (1259)$$

z čehož plyne pro normovanou funkci $f(t)$

$$D_f(0)D_F(0) \geq \frac{1}{4}. \quad (1260)$$

Čím více je tedy funkce $f(t)$ soustředěna kolem středního argumentu, tím méně je soustředěna okolo svého středního argumentu její Fourierova transformace $F(\omega)$.

Příklad 1: Gaussova funkce

Pro modelování v oblasti teorie pravděpodobnosti i jiných, má velký význam Gaussova funkce

$$\gamma(t) = e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}, \quad (1261)$$

kde $\sigma > 0$ je parametr určující „šířku“ funkce. Stanovení jejího obrazu provedeme z definičního vztahu, v němž obě exponenciely sloučíme a exponenty převedeme na součet čtverce a části nezávislé na t :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\gamma(t))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t^2}{\sigma^2} + i\omega t\right)} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t + i\omega\sigma}{\sigma}\right)^2 - \frac{\omega^2\sigma^2}{4}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t + i\omega\sigma}{\sigma}\right)^2} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}} dt. \end{aligned} \quad (1262)$$

Poslední integrand nemá primitivní funkci, takže jej bylo nutno zintegrovat lebesgueovsky:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}} dt \right)^2 &= 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}} dy dx = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \rho e^{-\frac{\rho^2}{\sigma^2}} d\varphi d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} \rho e^{-\frac{\rho^2}{\sigma^2}} d\rho = 2\pi \left[-\frac{\sigma^2}{2} e^{-\frac{\rho^2}{\sigma^2}} \right]_0^{\infty} = \pi\sigma^2, \end{aligned} \quad (1263)$$

čili

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}} dt = \sqrt{\pi}\sigma. \quad (1264)$$

Lze tedy psát

$$\mathcal{F}(\gamma(t))(\omega) = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{4}}, \quad (1265)$$

což je hledaný Fourierův obraz Gaussovy funkce. Je vidět, že tvar funkce se zachová, ale šířky originálu a obrazu jsou si (v souladu s principem neurčitosti) nepřímo úměrné.

Příklad 2: Gaussovské vlnové klubko

Nyní budeme diskutovat případ řešení jednorozměrné Schrödingerovy rovnice pro volnou částici, které lze psát v $t = 0$ ve tvaru tzv. **gaussovského vlnového klubka**

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{(\pi d^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2d^2}\right), \quad (1266)$$

kde d je kladné reálné číslo. Snadno lze ověřit, že tato vlnová funkce splňuje normovací podmínku

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,0)|^2 dx = \frac{1}{\sqrt{\pi d^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{d^2}\right) dx = 1, \quad (1267)$$

kde $|x - a| = d$ udává vzdálenost od středu vlnového klubka, pro níž hustota pravděpodobnosti klesne na hodnotu $1/e$ ve srovnání s její amplitudou.

Obr. 71



Snadno vypočteme střední hodnotu vlnové funkce (1266):

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,0) x \psi(x,0) dx = a, \quad (1268)$$

která je dle očekávání totožná s polohou středu vlnového klubka. Podobně snadno lze vypočíst i

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,0) x^2 \psi(x,0) dx = \frac{d^2}{2} + a^2. \quad (1269)$$

Odtud pak dostáváme střední kvadratickou odchylku souřadnice

$$\begin{aligned}
\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, 0) (x - \langle x \rangle)^2 \psi(x, 0) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, 0) (x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2) \psi(x, 0) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, 0) x^2 \psi(x, 0) dx - 2\langle x \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, 0) x \psi(x, 0) dx + \\
&= \langle x \rangle^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, 0) \psi(x, 0) dx = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{d^2}{2}.
\end{aligned}$$

(1270)

podobný výpočet můžeme provést i pro operátor impulsu. Nejdříve dostaneme

$$\langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, 0) -i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x, 0) dx = 0, \quad (1271)$$

kde integrál vyšel roven nule, neboť integrovaná funkce je lichá. Dále vypočteme

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, 0) i \frac{d^2}{dx^2} \psi(x, 0) dx = \frac{\hbar^2}{2d^2}. \quad (1272)$$

Pro střední kvadratickou odchylku impulsu odtud plyne

$$\langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{2d^2}. \quad (1273)$$

Pro vlnové klubko (1266) vychází tedy nenulová střední kvadratická odchylka jak souřadnice, tak i impulsu. Při měřeních na

kvantověmechanickém souboru daném touto vlnovou funkcí tedy nedostáváme ostré hodnoty souřadnice a impulsu, nýbrž hodnoty, jejichž distribuce pravděpodobnosti závisí na volbě parametru d . Je zřejmé, že čím je částice přesněji lokalizována v tzv. **souřadnicovém prostoru**, tím nepřesněji je lokalizována v **impulsovém prostoru** (tzn. tím nepřesněji je určen její impuls) a naopak. Součin kvadratických odchylek zůstává konstantní:

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}, \quad (1274)$$

odkud po odmocnění máme

$$\langle x - \langle x \rangle \rangle \langle \hat{p} - \langle \hat{p} \rangle \rangle = \frac{\hbar}{2}. \quad (1275)$$

Je zřejmé, že obecné řešení časové Schrödingerovy rovnice pro jednorozměrný pohyb volné částice lze psát ve tvaru superpozice řešení (1204)

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} c(p) \exp \frac{p^2 t - px}{i\hbar} dp, \quad (1276)$$

kde $c(p)$ je komplexní koeficient rozvoje do rovinných vln závislý na p . Z tohoto výrazu je patrné, že funkce $c(p)$ je Fourierovým obrazem funkce $\psi(x, 0)$, který lze určit pomocí inverzní Fourierovy transformace

$$c(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, 0) \exp \frac{px}{i\hbar} dx. \quad (1277)$$

Dosazením (1277) a (1266) do (1276) získáme hledaný výraz pro jednorozměrnou vlnovou funkci volné částice

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\hbar\pi^{\frac{5}{4}}d^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{px}{i\hbar} - \frac{(x-a)^2}{2d^2}\right) dx \exp\frac{p^2 t - px}{2m i\hbar} dp. \quad (1278)$$

Příklad 3: Heisenbergovy Relace neurčitosti

Pozoruhodnou vlastností kvantového světa je jeho nekumutativita. Spočtěme si pro jednoduchost střední hodnotu součinu operátorů hybnosti a polohy:

$$\begin{aligned} \langle \hat{p}\hat{x} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} (x\psi) dx = \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial x}{\partial x} \right) dx = \\ &= \frac{\hbar}{i} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi dx \right) = \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\hbar}{i}, \quad (1279) \end{aligned}$$

$$\langle \hat{x}\hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi dx = \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \frac{\partial \psi}{\partial x} dx.$$

Odtud plyne nerovnost

$$\langle \hat{p}\hat{x} \rangle - \langle \hat{x}\hat{p} \rangle = \frac{\hbar}{i} \neq 0. \quad (1280)$$

Definujme algebraickou strukturu zvanou **komutátor**:

$$[\hat{p}; \hat{x}] = \langle \hat{p}\hat{x} \rangle - \langle \hat{x}\hat{p} \rangle. \quad (1281)$$

Relaci (1280) pak můžeme zapsat v obvyklejším tvaru

$$[\hat{p}; \hat{x}] = \frac{\hbar}{i} \neq 0. \quad (1282)$$

Říkáme, že operátor polohy a hybnosti spolu vzájemně nekomutují. To je vlastnost, která v klasické mechanice nemá obdoby a naopak je zcela běžnou v mechanice kvantové.

Předpokládejme, že máme dvě nekomutující proměnné A, B . Potom

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}. \quad (1283)$$

Spočítejme střední kvadratické chyby měření. Použitá Diracova symbolika však bude podrobně vysvětlena až ve třetím dílu věnovaném vyšší algebře, takže čtenář, který s ní není dostatečně obeznámen, může následující výpočet v prvním čtení přeskočit. Pro součin kvadrátů středních kvadratických chyb měření (tzv. variancí) platí

$$\begin{aligned} (\Delta a_{kv})^2 (\Delta b_{kv})^2 &= \langle \psi | (\Delta \hat{A})^2 | \psi \rangle \langle \psi | (\Delta \hat{B})^2 | \psi \rangle = \langle \Delta \hat{A} \psi | \Delta \hat{A} \psi \rangle \langle \Delta \hat{B} \psi | \Delta \hat{B} \psi \rangle = \\ &= \|\Delta \hat{A} \psi\|^2 \|\Delta \hat{B} \psi\|^2 \geq \left| \langle \Delta \hat{A} \psi | \Delta \hat{B} \psi \rangle \right|^2 = \left| \langle \psi | \Delta \hat{A} \Delta \hat{B} | \psi \rangle \right|^2 = \\ &= \left| \langle \psi | \frac{1}{2} (\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} + \Delta \hat{B} \Delta \hat{A}) + \frac{1}{2} (\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} - \Delta \hat{B} \Delta \hat{A}) | \psi \rangle \right|^2 = \\ &= \left| \frac{1}{2} \langle \psi | \{ \Delta \hat{A}; \Delta \hat{B} \} | \psi \rangle + \frac{1}{2} \langle \psi | [\Delta \hat{A}; \Delta \hat{B}] | \psi \rangle \right|^2 \geq \\ &\geq \left| \frac{1}{2} \langle \psi | [\Delta \hat{A}; \Delta \hat{B}] | \psi \rangle \right|^2 = \\ &= \left| \frac{1}{2} \langle \psi | [\hat{A} - \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle; \hat{B} - \langle \psi | \hat{B} | \psi \rangle] | \psi \rangle \right|^2 = \\ &= \left| \frac{1}{2} \langle \psi | [\hat{A}; \hat{B}] | \psi \rangle \right|^2 = \left| \frac{1}{2} \langle \psi | i\hat{C} | \psi \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (1284)$$

Po odmocnění dostáváme

$$\Delta a_{kv} \Delta b_{kv} \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | \hat{C} | \psi \rangle|. \quad (1285)$$

Dosadíme-li sem např. výsledek (1282), máme $\hat{C} = \hbar \hat{l}$ a tedy

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} |\langle \psi | \hat{l} | \psi \rangle| = \frac{\hbar}{2}. \quad (1286)$$

ve shodě s výsledkem (1275) získaným na základě Fourierovy transformace vlnové funkce.

Pozorovatelné důsledky nekomutativity některých operátorů tedy spočívají v tom, že jim odpovídající veličiny nelze měřit současně s neomezenou přesností.

Matematicky tento princip poprvé formuloval německý fyzik Werner Heisenberg v roce 1928.



Werner Heisenberg (1901 – 1976)

Heisenbergův princip neurčitosti, jak se tento poznatek nazývá, říká, že součin přesnosti, s jakou měříme např. hybnost částice a současně její polohu, bude vždy větší, než polovina redukované Planckovy konstanty. Změříme-li tedy např. hybnost s přesností na 34 desetinných míst (řád Planckovy konstanty), bude již neurčitost její polohy v řádu metrů. A naopak, změříme-li velice přesně polohu, rozmaže se nám informace o hybnosti.

Heisenbergovy relace neurčitosti platí mezi všemi veličinami, jejichž operátory spolu vzájemně nekomutují. Platí tedy např. i mezi energií a časem:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (1287)$$

o čemž se snadno přesvědčíme, pokud dosadíme odpovídající operátory do (1283).

Příklad 4: Skalární součin na prostoru funkcí

Nekomutativitu kvantového světa můžeme snadno demonstrovat rovněž následujícím způsobem: vyjdeme z vlastností Fourierovy transformace, která navzájem propojuje vlnovou funkci $\psi(x)$ v souřadnicovém prostoru, s jejím Fourierovým obrazem $\phi(p)$ v impulsovém prostoru:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) e^{\frac{px}{i\hbar}} dp, \quad (1288)$$

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{\frac{px}{i\hbar}} dx,$$

kde p označuje x -ovou komponentu impulsu.

Přechod od stavového vektoru $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ v souřadnicové reprezentaci k jejímu Fourierovu obrazu $\phi(p) = \langle p | \psi \rangle$, tj. do impulsové reprezentace, lze provést velmi jednoduše:

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle = \langle x | \hat{\mathbf{1}} | \psi \rangle = \langle x | \int_{-\infty}^{\infty} dp | p \rangle \langle p | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x | p \rangle \phi(p) dp. \quad (1289)$$

Srovnáním (1289) a (1288) vidíme, že

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{px}{i\hbar}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \quad (1290)$$

a úplně analogicky bychom ukázali, že

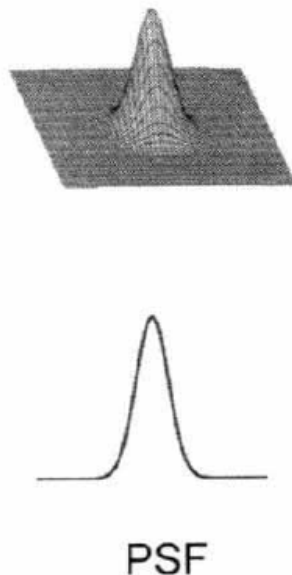
$$\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{px}{i\hbar}}. \quad (1291)$$

Příklad 5: Prostorové rozlišení, modulační přenosová funkce

Rozlišení zobrazovacího systému lze popsat prostřednictvím odezvy na bodový impuls.

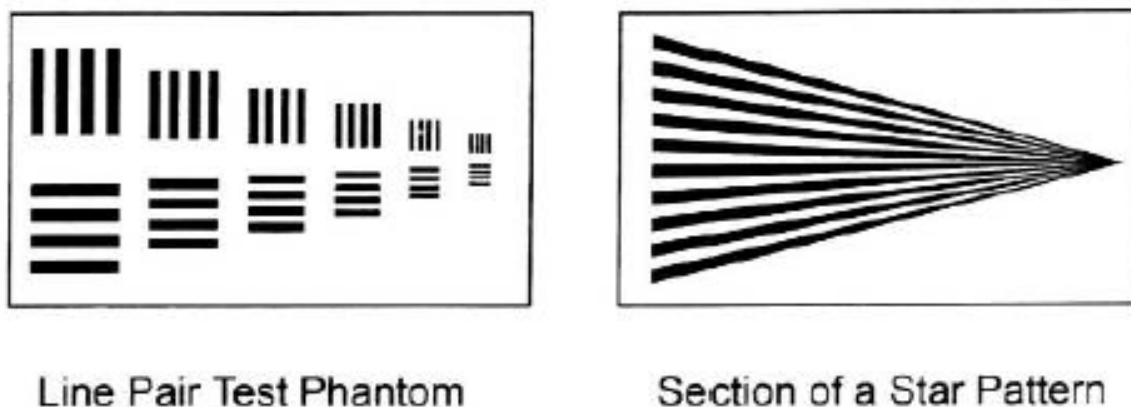
Obraz bodového impulsu – PSF (Point Spread Function) – má v ideálním případě tvar gaussovského píku, u něhož stanovujeme rozlišení standardně jako FWHM (Full Width in Half Magnitude).

Obr. 72



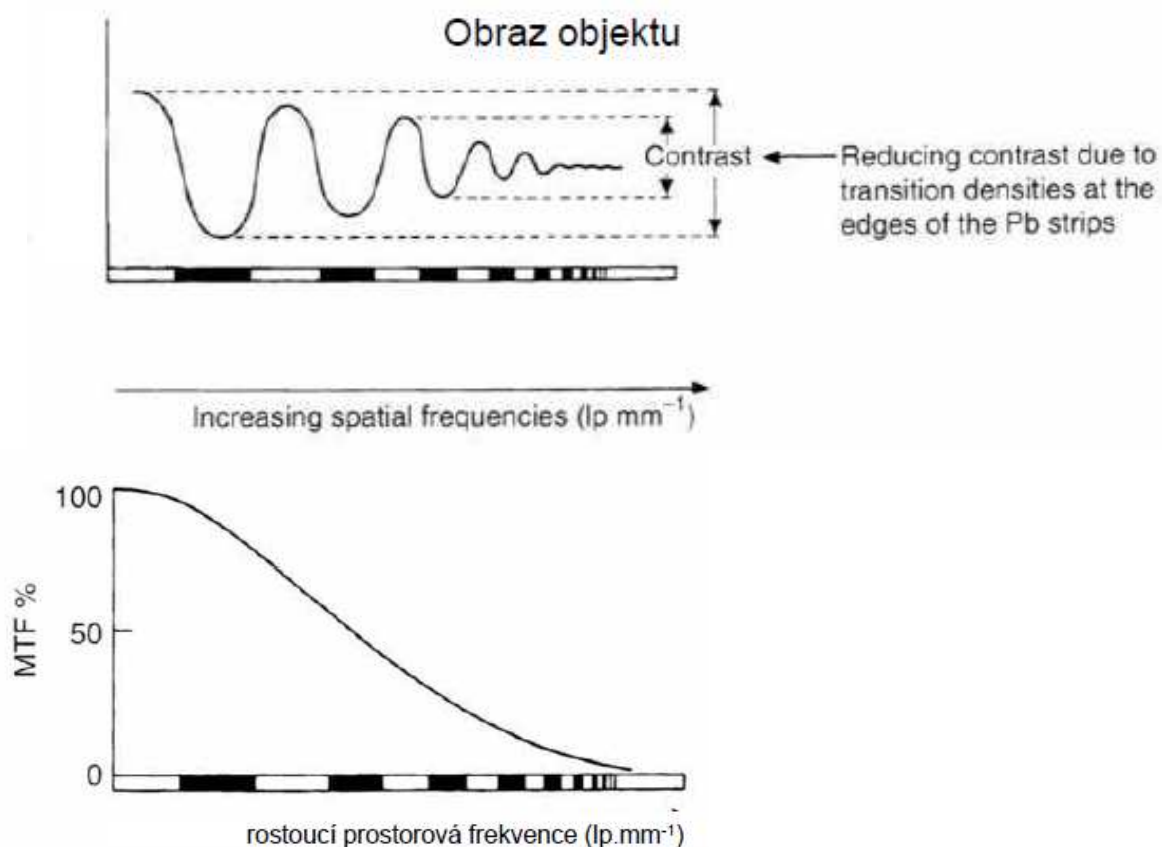
F (prostorová frekvence) se udává v lp/mm (line pair per mm). Měření F lze provádět buď pomocí Siemensovy hvězdice, nebo pomocí čárových testů.

Obr. 73



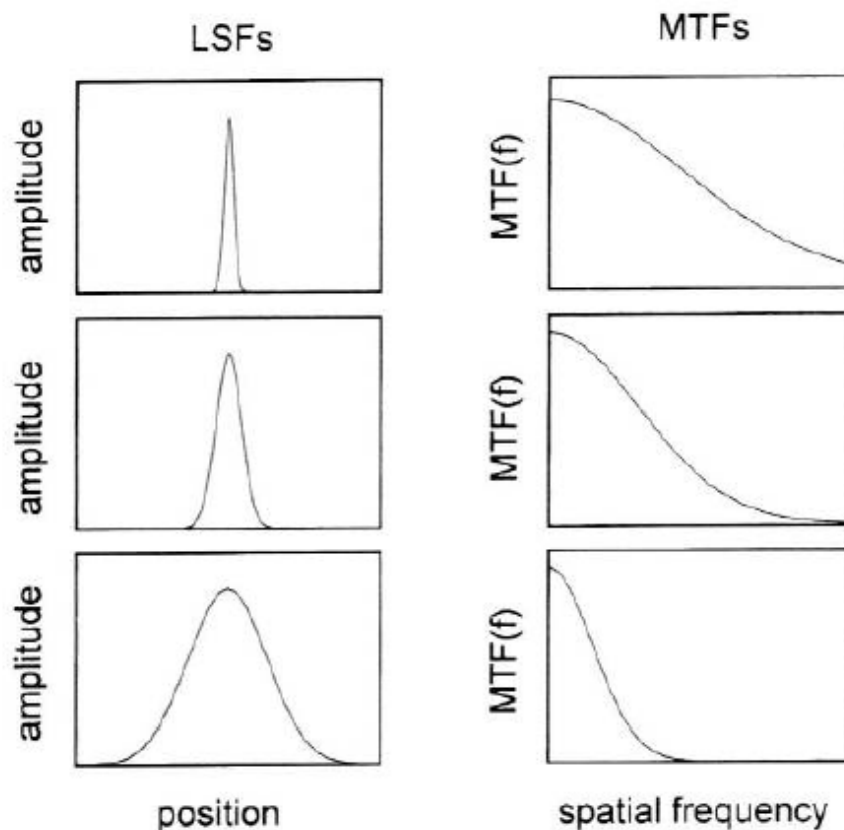
MTF (modulační přenosová funkce) popisuje, jakým způsobem zobrazovací systém zaznamenává objekty se zvyšujícím se F . Při vysokém F dochází k modulaci MTF
 MTF lze spočítat Fourierovou transformací LSF. Pokud má LSF gaussovský průběh, rovněž i MTF má gaussovský průběh (viz příklad 1).

Obr. 74



Čím je užší LSF (a tedy lepší rozlišení), tím je širší její fourierova transformace MTF (důsledek principu neurčitosti) a tím je vyšší F , jíž jsme schopni rozlišit.

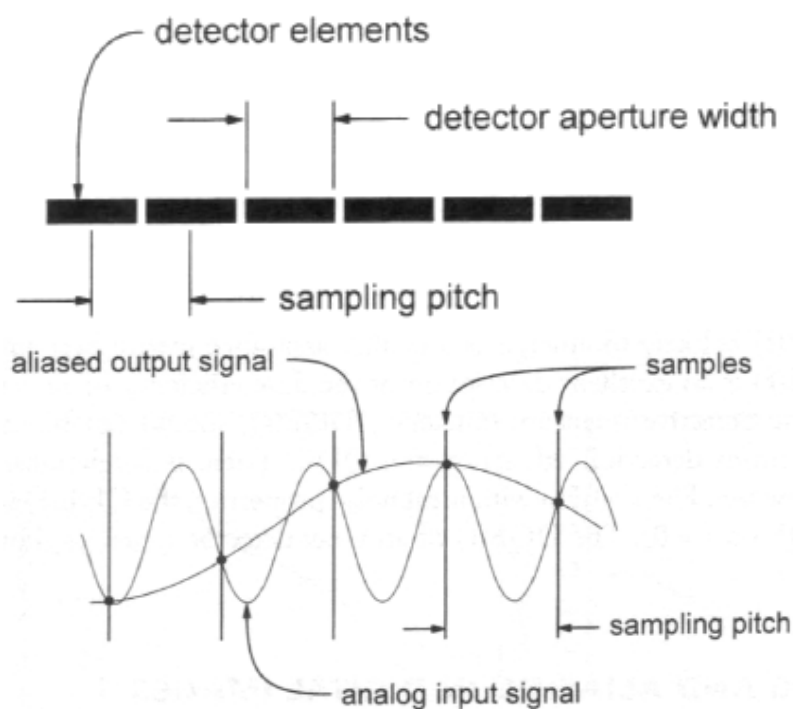
Obr. 75



Příklad 6: Nyquistovo kritérium, aliasing

Matice detekčních či zobrazovacích elementů je charakterizována vzorkovací šířkou Δ a šířkou detekčního (zobrazovacího) elementu – obě nenulové. Dochází ke vzorkování (pixelizaci) obrazu a zprůměrování obrazu přes šířku elementu. Interval prostorových frekvencí F , které mohou být detekovány či zobrazeny, je dán Nyquistovým kritériem $F \leq 1/(2\Delta)$.

Obr. 76



Mějme obdélníkový puls popsaný funkcí

$$f(x) = \begin{cases} E_0 & \text{pro } |x| \leq L \\ 0 & \text{pro } |x| > L \end{cases} \quad (1292)$$

Fourierova transformace obdélníkového pulzu je tedy

$$\begin{aligned} F(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [\cos(kx) + i \sin(kx)] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(kx) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(kx) dx. \end{aligned} \quad (1293)$$

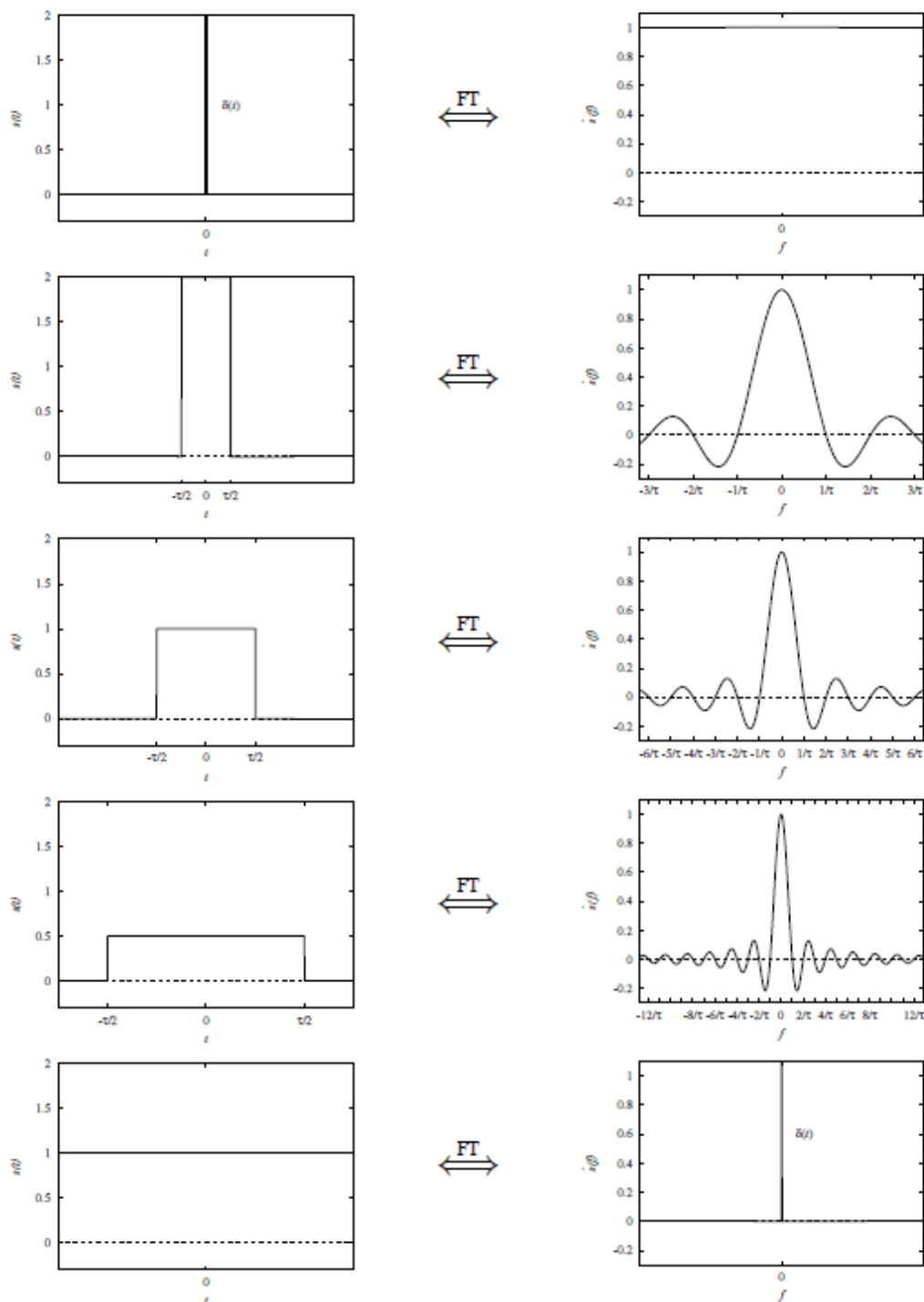
Protože $f(x)$ je sudá funkce, je poslední integrand lichou funkcí a jeho integrál je tudíž nulový. Máme tak

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(kx) dx = \int_{-L}^L E_0 \cos(kx) dx = \left[\frac{E_0}{k} \sin(kx) \right]_{-L}^L = 2E_0 L \frac{\sin kL}{kL} \quad (1294)$$

Označme L vzorkovací šířku detektoru (vzdálenost středu dvou sousedních detekčních elementů), F prostorovou frekvenci (lp/mm) signálu.

$$MTF(F, L) = E_0 L \frac{\sin(2L\pi F)}{L\pi F} \quad (1295)$$

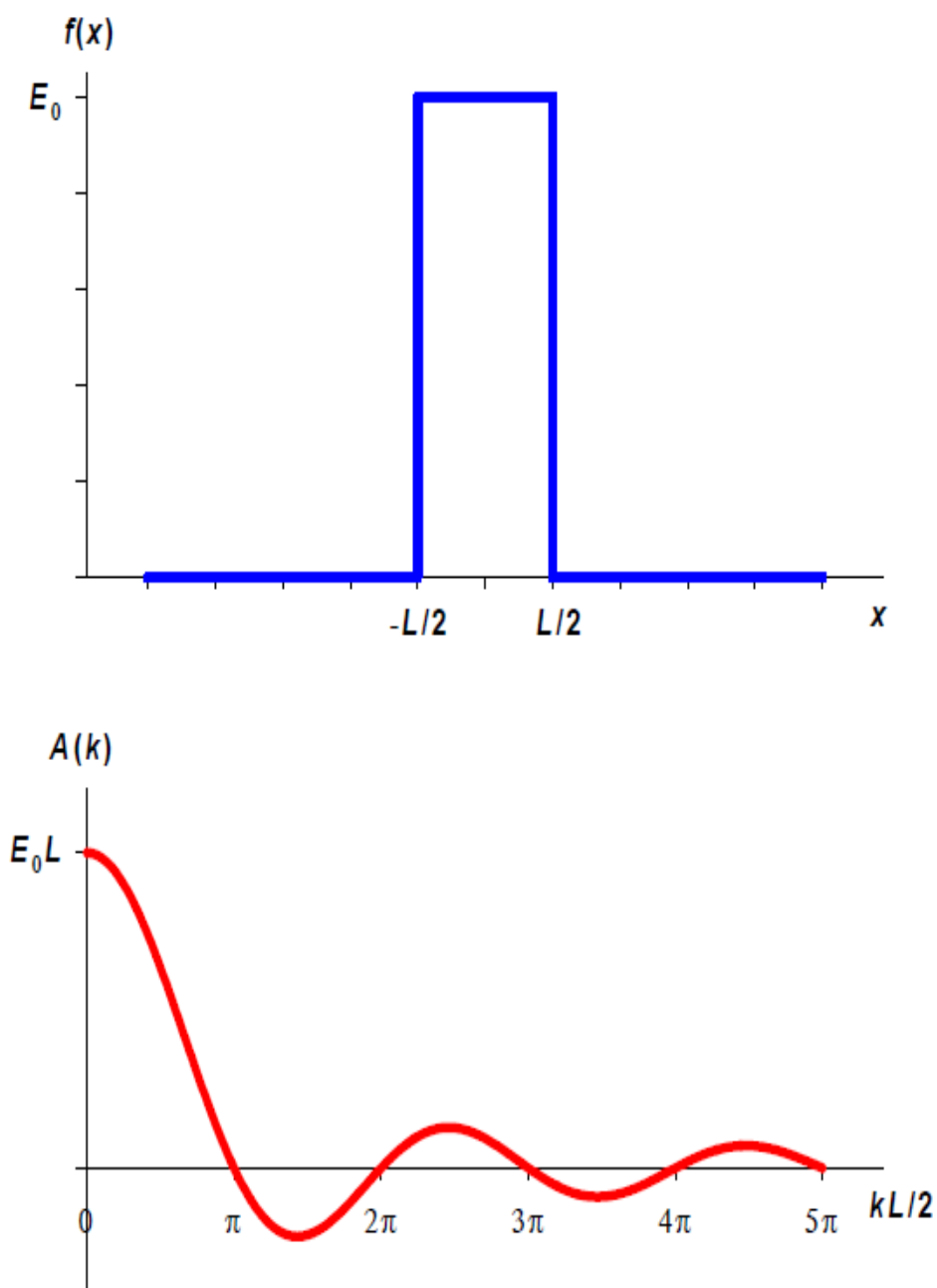
Obr. 77



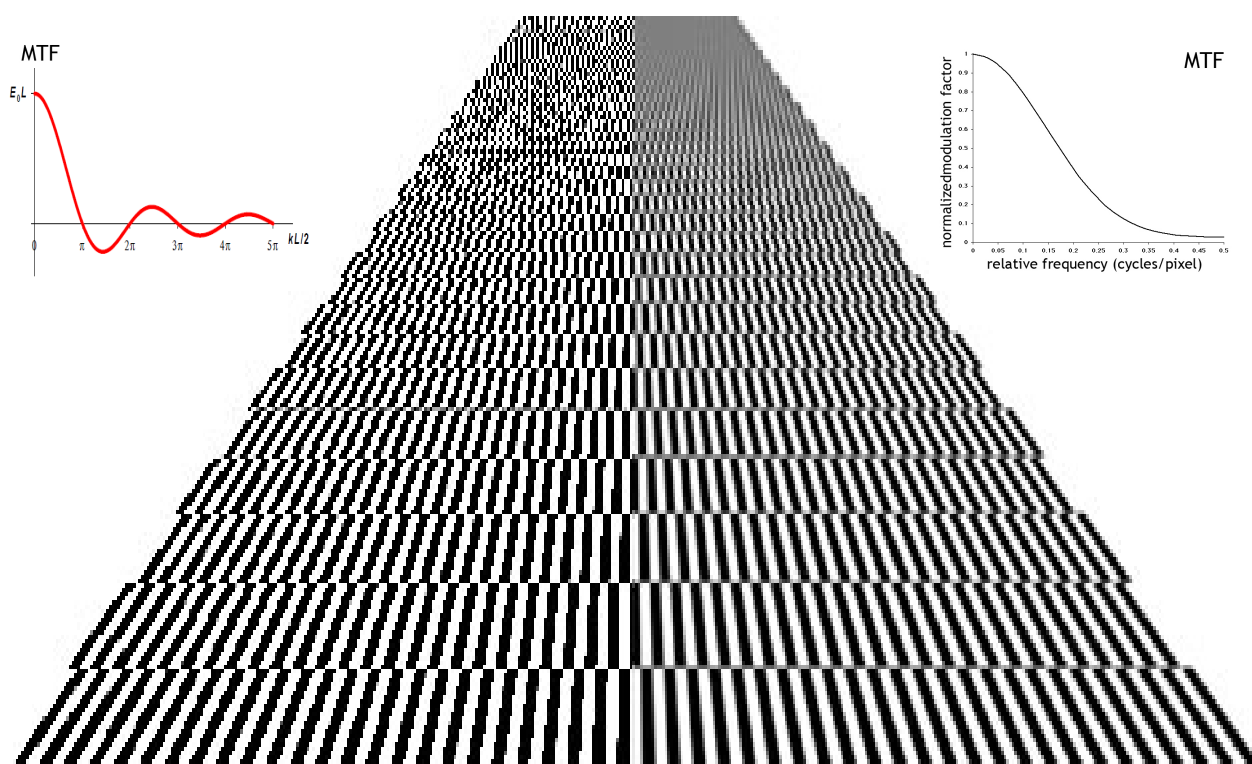
Je-li prostorová frekvence vstupního signálu vyšší než F_{lim} , dochází k modulaci MTF, což se projeví jako splývání struktur – aliasing. Frekvence výsledného splynutého signálu je o tolik menší než F , o kolik je větší frekvence vstupního signálu oproti F .

$$F_{\text{lim}} = \frac{1}{2L} \quad (1296)$$

Obr. 78



Obr. 79

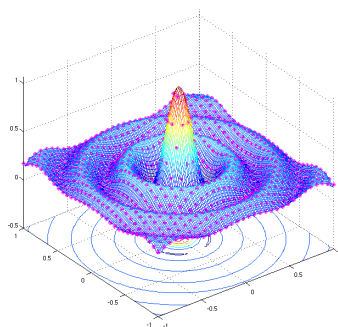


b) Vícerozměrné zobecnění

Dvourozměrnou Fourierovu transformaci můžeme definovat v bázi z funkcí $\exp[-i(kx + ly)]$ tak, aby zůstaly zachovány vlastnosti platné pro jednoduhou transformaci. Definujeme tedy:

$$F(\zeta, \xi) = \mathcal{F}(f(x, y)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i(x\zeta + y\xi)} dx dy, \quad (1297)$$

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}(F(\zeta, \xi)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta, \xi) e^{i(x\zeta + y\xi)} d\zeta d\xi.$$



Příklad 7 - difrakce

Vyjdeme z Helmholtzovy rovnice (1206) pro (bezčasovou) vlnovou funkci ψ a řešíme ji pomocí Greenovy integrální věty tak, že napíšeme tutéž rovnici pro funkci

$$\psi_0 = \frac{\exp(-iKr)}{r}, \quad (1298)$$

vynásobíme ji ψ a odečteme od první rovnice násobené ψ_0 , čímž dostaneme $\psi\Delta\psi_0 - \psi_0\Delta\psi = 0$ a aplikací Greenovy věty máme

$$\oiint_S (\psi \operatorname{grad} \psi_0 - \psi_0 \operatorname{grad} \psi) d\mathbf{S} = 0. \quad (1299)$$

Provedeme-li integraci tak, že kolem bodu r_0 opíšeme malou kouli a integrál přes plochu S rozdělíme na dva, vyčíslíme hodnoty a poté budeme zmenšovat poloměr koule k nule, dostaneme tzv. Kirchhoffův integrální vztah

$$\psi(R) = \frac{1}{4\pi} \oiint_S \left(\frac{\exp(-iKr)}{r} \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \frac{\exp(-iKr)}{r} \right) d\mathbf{S}. \quad (1300)$$

Pro vypočítání integrálu rozdělíme integrační plochu na tři části: plochu stínítka, plochu otvoru a kulovou plochu s poloměrem hodně velkým. Budeme předpokládat, že na ploše otvoru se hodnoty ψ a gradientu liší jen zanedbatelně od stavu bez stínítka, a že na ploše stínítka a kulové plochy je

$$\psi = \operatorname{grad} \psi = 0. \quad (1301)$$

Budeme-li dále předpokládat, že vzdálenosti zdroje a bodu pozorování od bodu stínítka jsou $r_0 \gg \lambda$, $r \gg \lambda$, dostaneme pro bodový zdroj světla tzv. Fresnelův–Kirchhoffův difrakční vzorec:

$$\psi(R) = \frac{iA}{2\lambda} \iint_S \frac{\exp[-i\kappa(r+r_0)]}{rr_0} \left[\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{S}}{\|\mathbf{r}\| \|\mathbf{S}\|} - \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{S}}{\|\mathbf{r}_0\| \|\mathbf{S}\|} \right] dS \quad (1302)$$

kde výrazy v hranaté závorce napravo vyjadřují kosiny úhlů mezi oběma vektory.



Augustin-Jean Fresnel (1788 – 1827)



Gustav Robert Kirchhoff (1824 – 1887)

Mění-li se tento činitel v hranaté závorce jen málo (je přibližně $\cos \tau$) a vzdálenosti r , r_0 lze nahradit vzdálenostmi od počátku souřadnic (v ploše otvoru), dostaneme z (1302)

$$\psi(R) = \frac{iA \cos \tau}{RR_0 \lambda} \iint_S \exp[-i\kappa(r+r_0)] dS \quad (1303)$$

Rozvineme-li vzdálenosti r_0 , r v řadu a zanedbáme-li členy vyšších řádů než lineární (což lze provést, vzhledem k periodicitě funkce $\exp(x)$, jsou-li nelineární členy mnohem menší než 2π), dostaneme vzorec ve tvaru

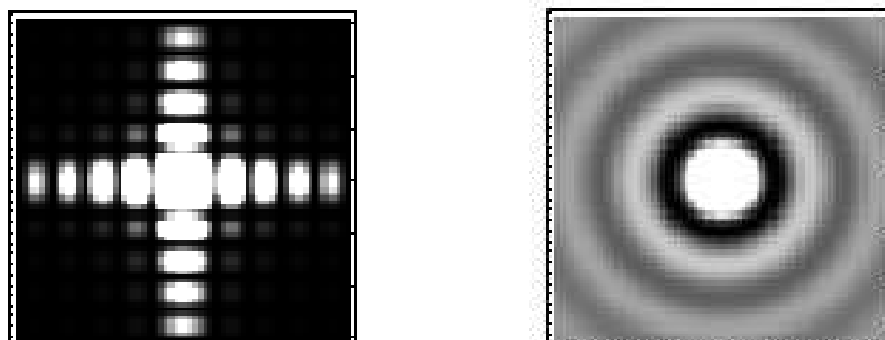
$$\psi(R) = B \iint_S \exp[-i\kappa(\zeta x + \xi y)] dS \quad (1304)$$

kde ζ , ξ jsou směrové kosiny polohového vektoru bodu R k osám x , y . Zavedeme-li funkci amplitudové propustnosti $\Gamma(x, y)$, která je

jednotková v bodech otvoru a nulová mimo něj (obdélníkový puls), můžeme rozšířit integraci přes celý prostor a výsledná vlna je úměrná dvourozměrné Fourierově transformaci funkce propustnosti:

$$\psi(R) = |\psi(\zeta', \xi')| \sim \mathcal{F}(\Gamma(x, y)). \quad (1305)$$

Pro čtvercový a kruhový otvor je difrakční obrazec vykreslen na obr. 80.



Obrázek 80: Difrakce na čtvercovém a kruhovém otvoru.

Je však nutno upozornit, že daná metoda uvažuje pouze skalární pole, zatímco elektromagnetické pole má vektorový charakter, čímž se dopouštíme dalšího zjednodušení.

Příklad 6 – Zobrazení nukleární magnetickou rezonancí – MRI

Prostorové dekódování MR signálu

Aby bylo možné odlišit signály vedené z různých vrstev těla, je potřeba, aby protony v různých místech reagovaly při průchodu RF pulzu o vhodné frekvenci.

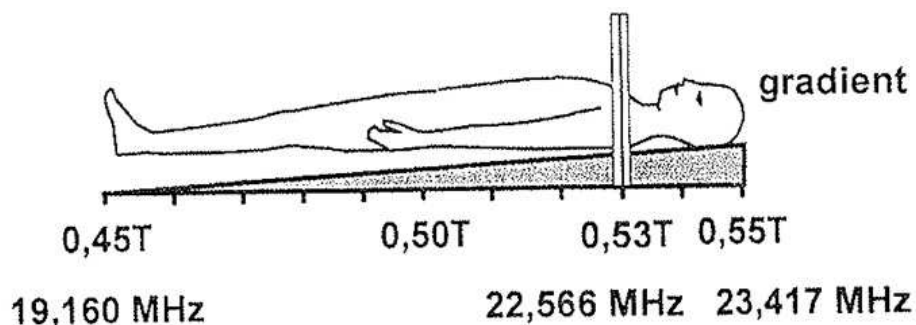
K homogennímu poli hlavního magnetu jsou proto přidána pole další (tzv. gradienty). Pole, jehož intenzita roste s osou těla, vytváří magnetický gradient, který umožňuje zvolit rovinu řezu, a proto je nazýván „*slice selecting gradient*“ (rovinu řezu určující gradient). V praxi pak například u nohou působí pole o síle 0,45 T (odpovídající $f = 19,160$ MHz), kdežto u hlavy 0,55 T ($f = 23,417$ MHz). Vysláním vhodné frekvence vybíráme tedy jen řez, který chceme zobrazit. Pro

řez například oblouku aorty bude mít impuls frekvenci 22,566 MHz. Regulovat tloušťku řezu pak můžeme dvěma způsoby:

různým rozsahem frekvence impulsu, tedy čím větší rozsah pulsu, tím širší řez.

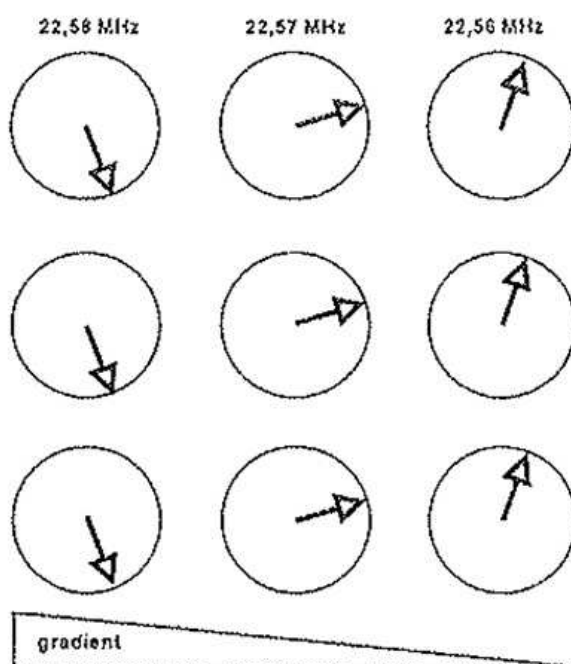
sklonem gradientu, jinak řečeno rozsahem pole, ve kterém se tělo nachází. Zde platí, že čím strmější je gradient, tím užší řez získáme.

Obr. 82

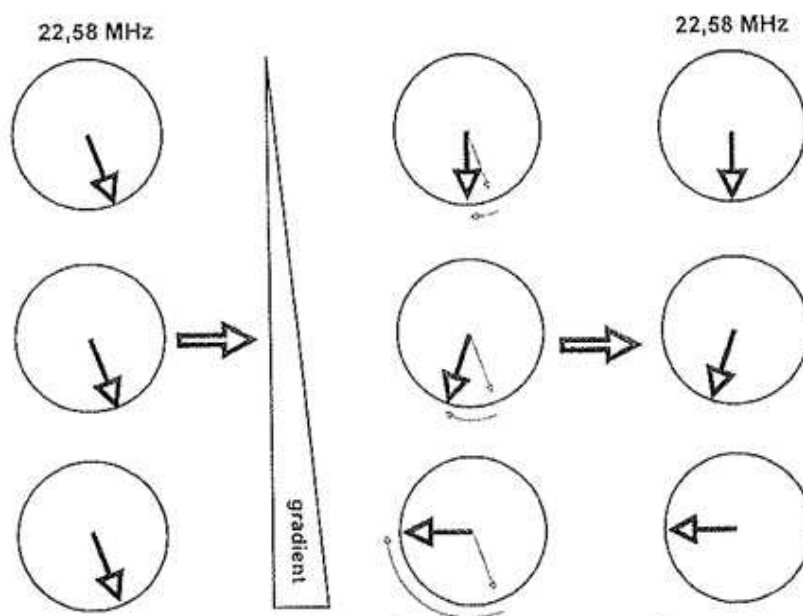


Jelikož jedna souřadnice k prostorovému určení nestačí, je přidáno další pole. Tentokrát je ale pole na dlouhou osu těla kolmé, a síla se tedy mění v pravolevém směru. Díky tomu budou protony umístěné v různých „sloupcích“ těla emitovat různou frekvenci. Tento gradient je nazýván „*frequency encoding gradient*“ (frekvenci určující gradient) či „*readout gradient*“ (odečítací gradient). Konečné určení bodu v prostoru poskytne třetí gradient, který však funguje poněkud odlišně. Nachází se ve směru kolmém na readout gradient, je však zapnut pouze na velice krátký okamžik před aplikací samotného readout gradientu. To ovlivní frekvenci precese jednotlivých protonů ve sloupci, avšak s ohledem na vzdálenost. Tedy ty, které byly ovlivněny polem s vyšší intenzitou, budou mít vyšší frekvenci než zbylé. Jakmile tento gradient pomine, bude Larmorova frekvence protonů ve sloupci opět stejná, jenže už nebudou kmitat ve společné fázi, ale v různé podle toho, jak moc byly gradientem ovlivněny. Tento gradient je proto nazýván „*phase encoding gradient*“ (fázi určující gradient). Pomocí přidanych magnetických gradientů ovlivníme precesní frekvenci a fázi spinů v závislosti na jejich prostorové lokalizaci. Aplikací prvního, rovinu vrstvy určujícího gradientu zvolíme vrstvu, jíž budeme zobrazovat. S pomocí dalších dvou na sebe kolmých gradientů nastavíme frekvenci a fázi signálu v jednotlivých voxelech tak, abychom dokázali signál prostorově dekodovat.

Obr. 82

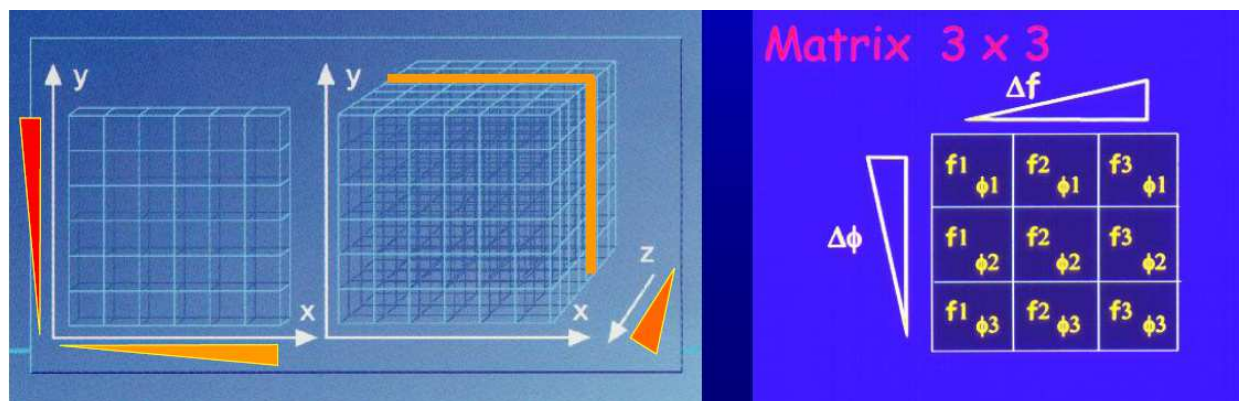


Obr. 83



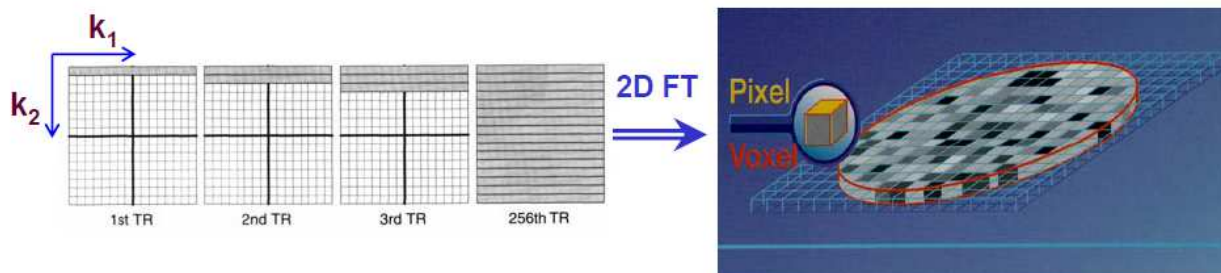
Matice získaných dat tvoří k-prostor. Vodorovně (k_1) máme jednotlivé FIDy (obsahují frekvenční kódování).
 Ve sloupcích (k_2) máme informaci zakódovanou fázově.

Obr. 83



Po Fourierově transformaci v obou dimenzích získáme obraz.

Obr 84



Frekvenční k -prostor

V **prostorové oblasti**, obvyklém eukleidovském prostoru (**r -prostoru**), je obraz zobrazované veličiny F popsán **distribuční funkcí**, neboli polem, $F(x,y,z)$. Ve vektorovém zápisu, zavedením prostorového vektoru \mathbf{r} , je tato funkce $F(\mathbf{r})$. Obecnou **Fourierovou transformací** vzniká nová distribuční funkce

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}) = \iiint_V F(\mathbf{r}) e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (1306)$$

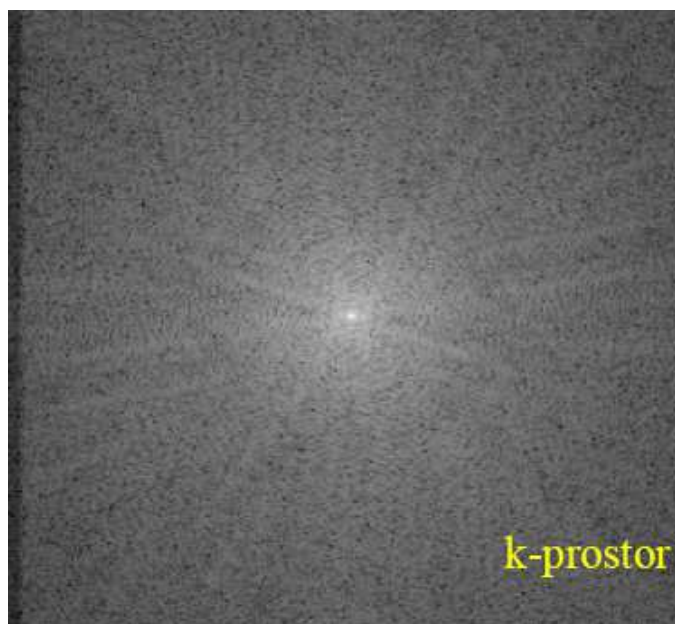
kde $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ je vlnový vektor.

Integruje se přes prostorovou oblast V . Distribuční funkce $\mathcal{F}(\mathbf{k})$ je definována v novém lineárním 3-rozměrném vektorovém prostoru. Prostorová $F(\mathbf{k})$ i frekvenční $\mathcal{F}(\mathbf{k})$ distribuční funkce **nesou tutéž informaci** a souvisejí spolu přímou a inverzní Fourierovou

transformací.

Z matematického hlediska tedy z běžného metrického eukleidovského **r-prostoru** fourierovskou transformací vzniká nový "frekvenční" prostor, označovaný někdy jako **k-prostor** (k-space).

Obr. 85



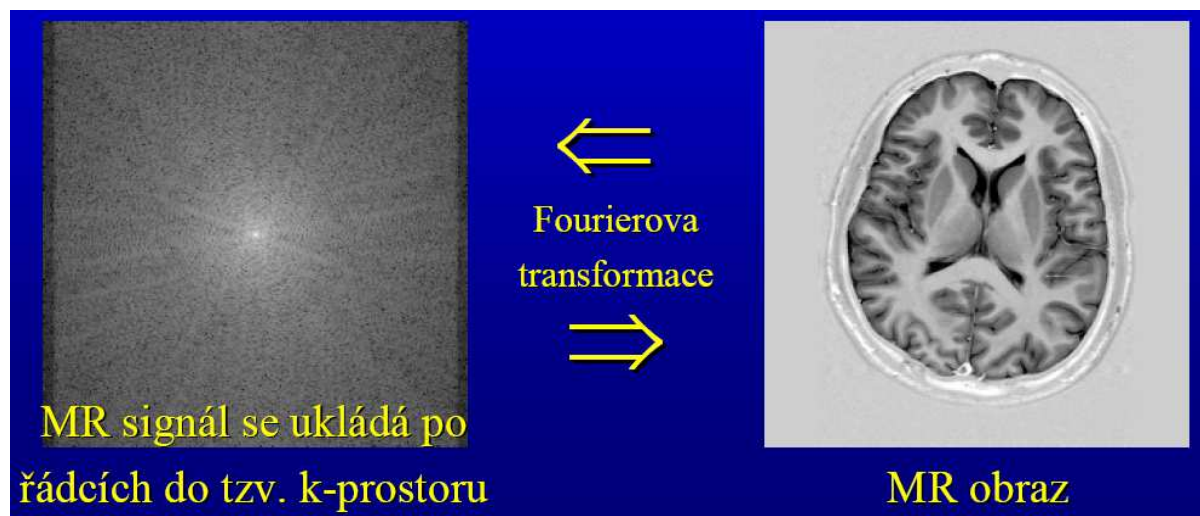
Název vznikl podle toho, že po Fourierově transformaci je novou nezávisle proměnnou "vlnový" vektor **k** (obecně komplexní). Abstraktní k-prostor je v jistém smyslu "reciproční" k obvyklému fyzikálnímu r-prostoru.

Výstavba MR obrazu

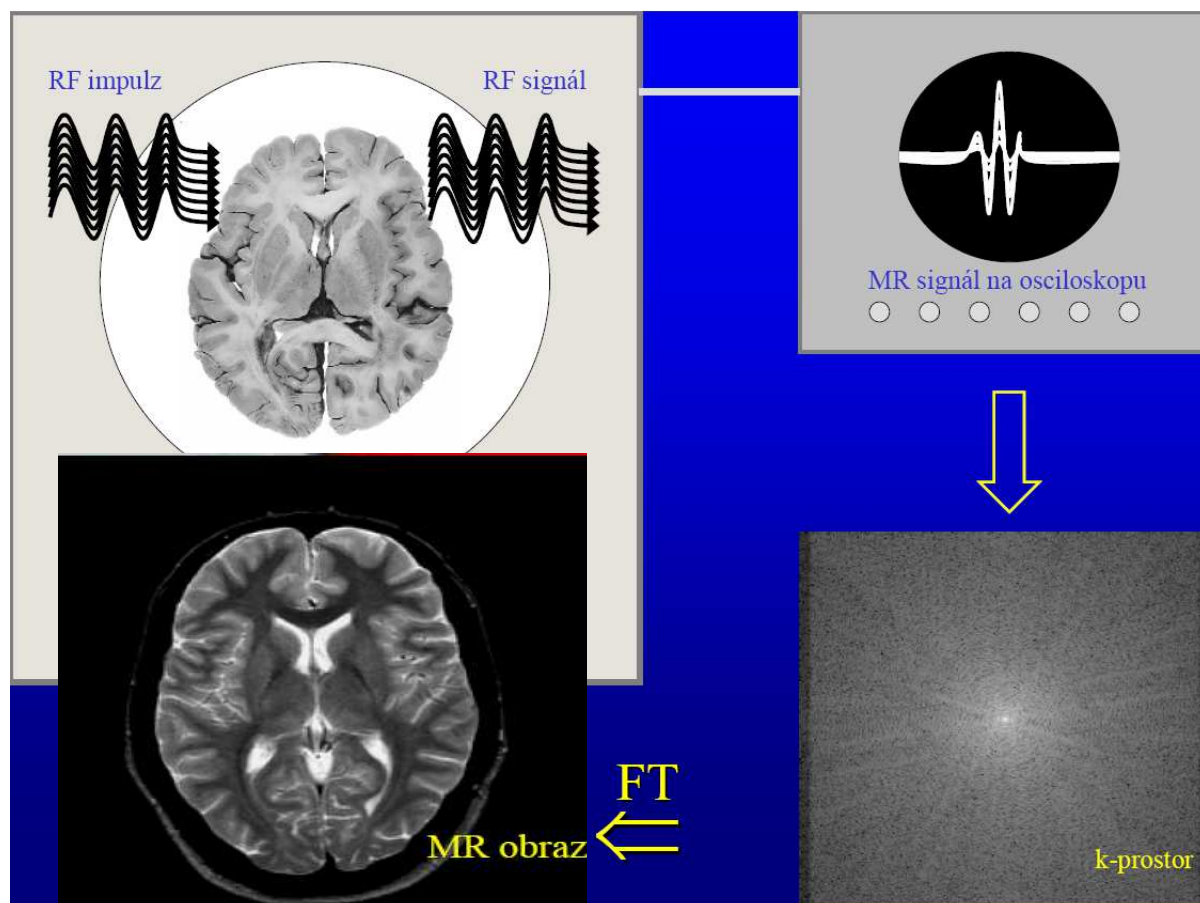
Z rozdílů frekvence a fáze složek MR signálu lze Fourierovou transformací rekonstruovat informaci o poloze zdroje signálu.

Každý MR signál získaný s konkrétní hodnotou fázi určujícího gradientu, představuje jednu řádku (vektor) dat v matici k-prostoru.

Obr. 86

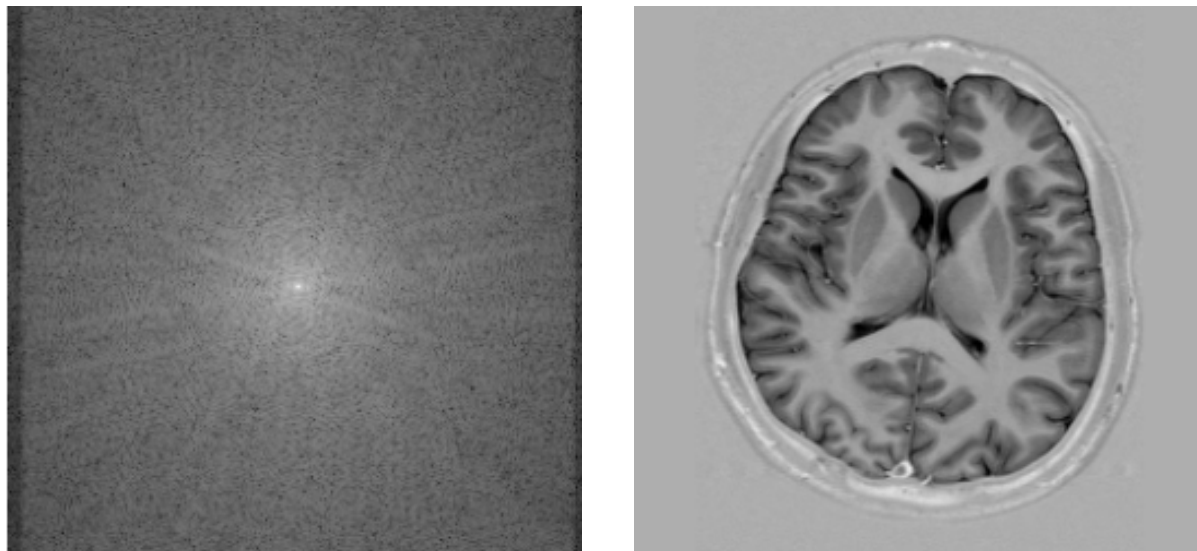


Obr. 87



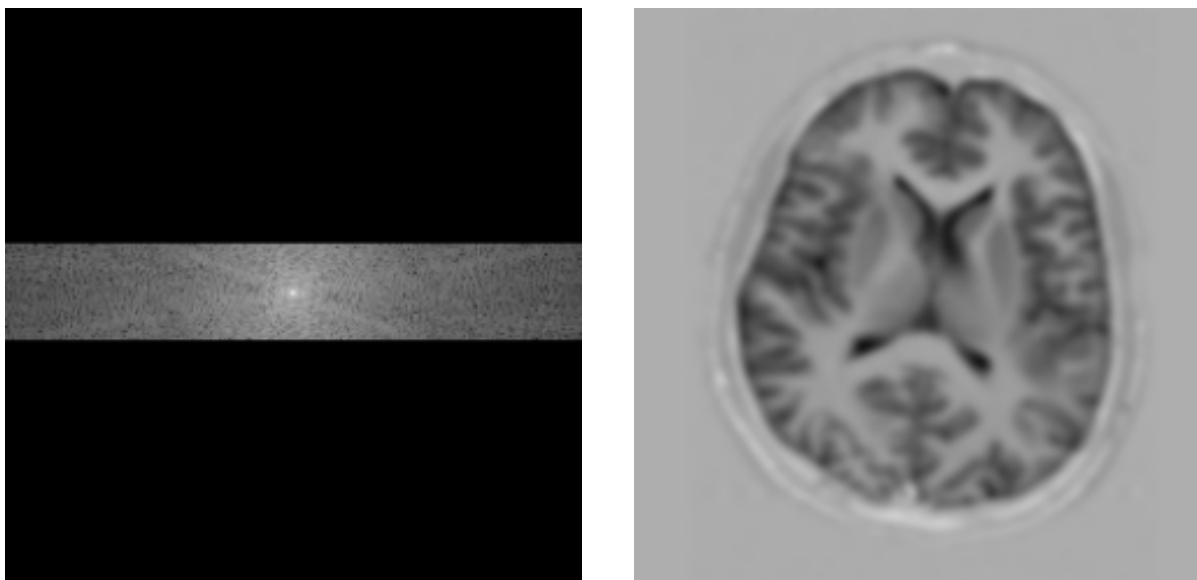
Vlastnosti k-prostoru

Obr. 88



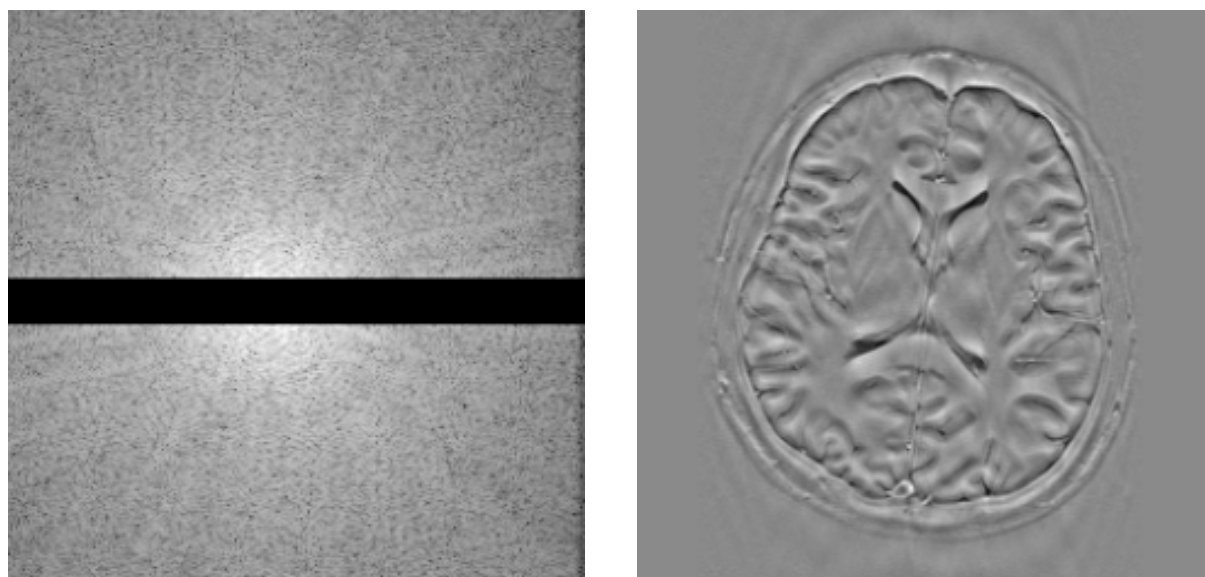
k-prostor nese úplnou informaci o MR obrazu zakódovanou ve frekvenční oblasti

Obr. 89



Vysoké frekvence jsou zásadní pro kontrast obrazu, chybí však ostrost kontur

Obr. 90

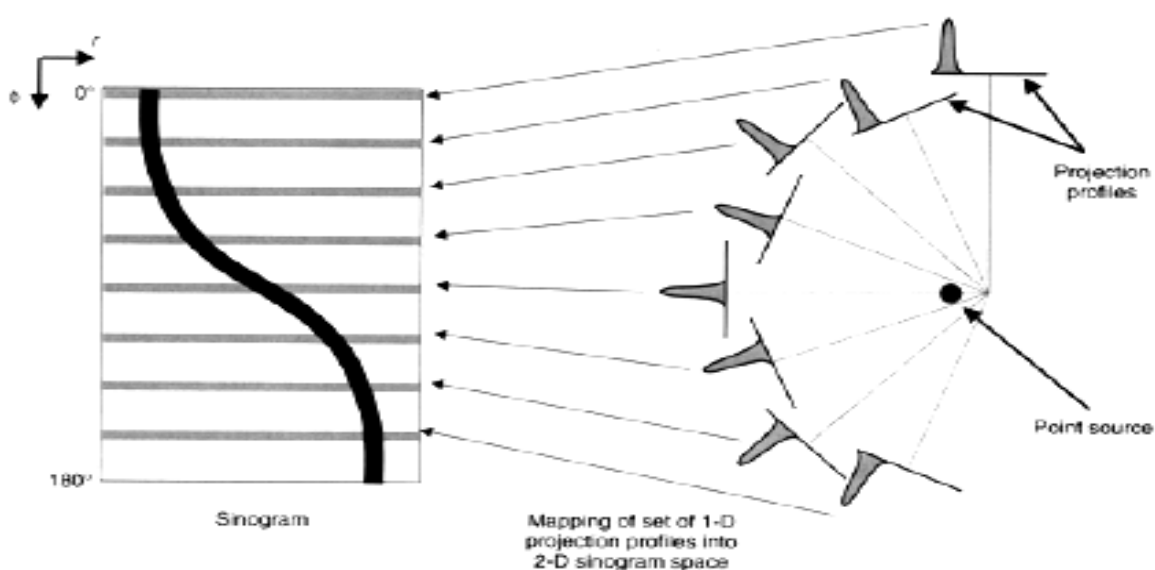


Nízké frekvence nesou informaci o konturách, chybí však kontrast

Příklad 7 – Zobrazení výpočetní tomografií – CT

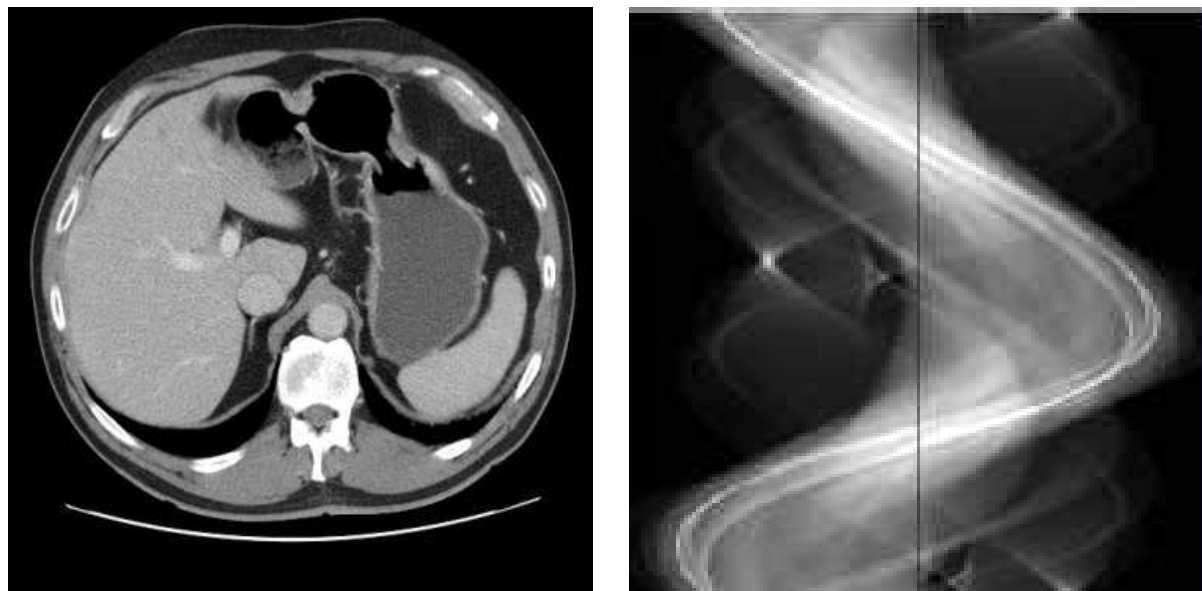
Jak znázorňuje obrázek 80, při CT projekci tvoří každý bod objektového prostoru sinusoidu v tzv. **Radonově prostoru**.

Obr. 91



Reprezentací objektu v Radonově prostoru je 2D soubor všech projekcí $p_\theta(r)$ jednotlivých bodů objektu pro všechny úhly θ , zvaný **sinogram** (viz obr. 81).

Obr. 92



Přechod z objektového prostoru, v němž je poloha každého bodu objektu popsána souřadnicemi x, y , do Radonova prostoru, v němž je poloha téhož bodu popsána souřadnicemi r, θ , nazýváme **Radonovou transformací**.

Jsou-li r, s nové souřadnice bodu v bázi, jež je vzhledem k původní bázi pootočena o úhel θ , potom mezi souřadnicemi bodu v jeho původní bázi (x, y) a jeho souřadnicemi v nové bázi (r, s) platí známé převodní vztahy

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1307)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}.$$

Cílem je rekonstrukce obrazu původního objektu ze sinogramu, neboli výpočet **inverzní Radonovy transformace**. Matematickým vyjádřením Radonovy transformace je Fourierova transformace

projekcí objektu. Objekt je na sinogramu reprezentován sumou sinů s různým k , neboli Fourierovým obrazem

$$F(k_1, k_2) = F[f(x, y)] = \iint f(x, y) e^{-2\pi i(k_x x + k_y y)} dx dy, \quad (1308)$$

kde

$$\begin{aligned} k_x &= k \cos \theta, \\ k_y &= k \sin \theta, \\ k &= \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \end{aligned} \quad (1309)$$

Inverzní Fourierovou transformací

$$F^{-1}[F(k_x, k_y)] = f(x, y) \quad (1310)$$

je z Fourierova obrazu získán původní objekt $f(x, y)$.

Pro výpočet zpětné rekonstrukce je využíván tzv. **Fourier central slice theorem**, který říká, že jednodimenzionální Fourierova transformace projekce $p_\theta(r)$ je rovna dvojdimenzionální Fourierově transformaci objektu v k -prostoru. Hodnoty souboru jednodimenzionální Fourierovy transformace řádků sinogramu se tedy rovnají hodnotám dvojdimenzionální Fourierovy transformace zobrazovaného objektu, čili

$$P(k, \theta) = F[p_\theta(r)] = \int p_\theta(r) e^{-2\pi i k r} = F(k_x, k_y). \quad (1311)$$